Exercice 2 5 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0=0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n=0{,}1\times 1{,}6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n>0{,}4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) définie par :
$v_0=0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=1{,}6v_n-1{,}6v_n^2$ où pour tout entier naturel n v_n est le nombre d'insectes, exprimé en million, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=1{,}6x-1{,}6x^2$.
2.a. Résoudre l'équation $f(x)=x$.
2.b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.
3.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.
3.b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
On note L la valeur de sa limite. On admet que L est solution de l'équation $f(x)=x$.
3.c. Déterminer la valeur de L.
Selon ce modèle l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.
4. On donne ci-dessous la fonction seuil ; écrite en Python :

```
def seuil(a):
  v=0.1
  n=0
  while v<a:
    v=1.6*v-1.6*v*v
    n=n+1
  return n
```

4.a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0,4) ?
4.b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0,35).
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois. Donc, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'insectes, exprimé en million, au bout de n mois et u_{n+1} est le nombre d'insectes, exprimé en million, au bout de $n+1$ mois.

u_{n+1} est égal à u_n augmenté de 60 % de u_n, soit $u_{n+1}=u_n+\frac{60}{100}u_n=(1+0,6)\times u_n=1,6\times u_n$.

(u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_0=0,1$ eet de raison $q=1,6$.

Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n=0,1\times 1,6^n$.

2. $1,6>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,6^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3. $u_n>0,4 \iff 0,1\times 1,6^n>0,4 \iff 1,6^n>\frac{0,4}{0,1}=4$

(ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\iff \ln(1,6^n)>\ln(4) \iff n\times\ln(1,6)>\ln(4)$

($1,6>1$ donc $\ln(1,6)>0$)

$\iff n>\frac{\ln(4)}{\ln(1,6)}$

(en utilisant la calculatrice : $\frac{\ln(4)}{\ln(1,6)}\simeq 2,95$ et n est un entier naturel)

$\iff n\geqslant 3$

3 est le plus petit entier naturel n tel que $u_n>0,4$.

4. Au bout du 3[ème] mois le nombre d'insectes sera supérieur à 400000 (0,4 million) donc l'équilibre du milieu naturel, ne sera pas préservé.

Partie B

1. $v_1=1,6v_0-1,6v_0^2=0,16-0,016=0,144$.

Au bout d'un mois il y aura 144000 insectes.

2. $x\in[0;\frac{1}{2}]$ et $f(x)=1,6x-1,6x^2$

2.a. $f(x)=x \iff \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2} \\ 1,6x-1,6x^2=x \end{cases}$

$1,6x-1,6x^2=x \iff 0=1,6x^2-0,6x \iff x(1,6x-0,6)=0 \iff \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{0,6}{1,6}\right)$

$\iff (x=0 \text{ ou } x=0,375)$.

$0\leqslant 0\leqslant\frac{1}{2}$ et $0\leqslant 0,375\leqslant\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S}=\{0;0,375\}$

2.b. f est dérivable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $\quad f'(x)=1,6-3,2x=3,2\left(\frac{1}{2}-x\right)$.

Si $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ alors $f'(x)\geqslant 0$ et f est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.

Initialisation

Pour $n=0$ on a $v_0=0,1$ et $v_1=0,144$ donc $0\leqslant v_0\leqslant v_1\leqslant\frac{1}{2}$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :
$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ et on doit démontrer que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

f est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Si $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(0)=0$ $f(v_n)=v_{n+1}$ $f(v_{n+1})=v_{n+2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}6\times\frac{1}{2}-1{,}6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}8-0{,}4=0{,}4$

donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 0{,}4 \leqslant \frac{1}{2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

3.b. Pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante et $v_n \leqslant 0{,}5$ donc la suite (v_n) est majorée.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc (v_n) est une suite convergente.

3.c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=L$ donc L est une solution de l'équation f(x)=x et L=0 ou L=0,375.
(v_n) est une suite croissante et $v_0=0{,}1$ donc $L=0{,}375$.
$L<0{,}4$ donc selon ce modèle l'équilibre du milieu naturel est préservé.

4.a. (v_n) est une suite croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0{,}375$ donc pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 0{,}375<0{,}4$
et le programme Python ne s'arrête pas.

4.b. Si on exécute le programme, la valeur renvoyée est 6.
Sinon on calcule les premiers termes de la suite v_n en utilisant la calculatrice.
$v_0=0{,}1$ $v_1=0{,}144$ $v_2\simeq0{,}197$ $v_3\simeq0{,}253$ $v_4\simeq0{,}303$ $v_5\simeq0{,}338$ $v_6\simeq0{,}358$
(remarque : les calculs sont effectués en utilisant la précision de la calculatrice mais on écrit des valeurs approchées au millième).