Exercice 3 — 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère :

. le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est : $2x+y-z+2=0$.

. le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point $B(1;1;2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1.a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

1.b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.
Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2.a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

2.b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=0\\ y=-2+t \\ z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
On considère le point $A(1;1;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2.b., la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0;-2+t;t)$ où t désigne un nombre réel quelconque.

3.a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

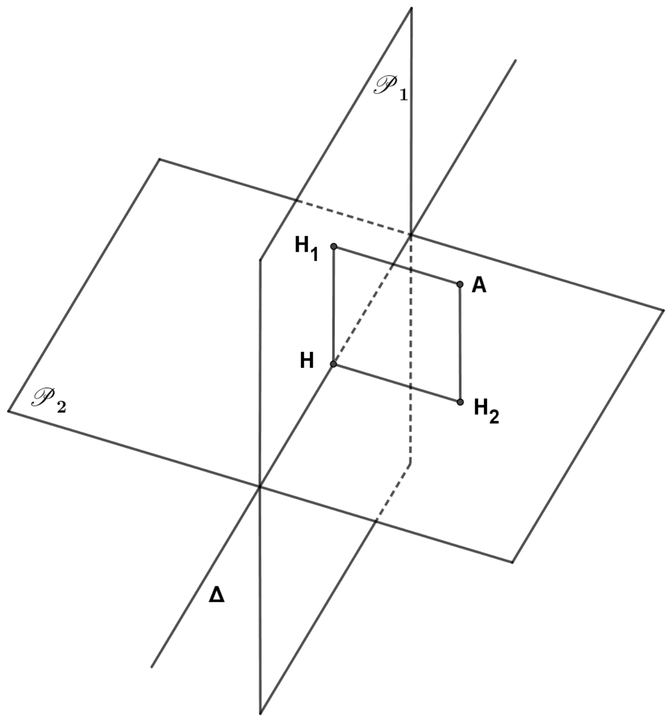
3.b. En déduire que $AH=\sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

4.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

4.b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$. On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0;0;2)$.
Sur le schéma ci-après les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A ; H_1 ; H_2 ; H.
Montrer que AH_1H_2H est un rectangle.


$\mathscr{P}_1$
H_1
A
H
H_2
$\mathscr{P}_2$
Δ

CORRECTION

1.a. $\mathscr{P}_1 :\ 2x+y-z+2=0$ $\qquad \vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

1.b. $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{n}_1.\vec{n}_2=1\times2+1\times(-1)+(-1)\times1=2-1-1=0$

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2.a. $M(x;y;z)$ $\qquad B(1;1;2)$ $\qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

M appartient à $\mathscr{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_2.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)-1\times(y-1)+1\times(z-2)=0$
$\Leftrightarrow x-1-y+1+z-2=0 \Leftrightarrow x-y+z-2=0$.

2.b. $\begin{cases}2x+y-z+2=0\\x-y+z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=t\\2x+y=t-2\\x-y=-t+2\end{cases}\ t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}z=t\\3x=0\\3y=3t-6\end{cases}\ t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=t-2\\z=t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$.

La droite Δ est donc la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3.a. $M_t(0;-2+t;t)$ $\qquad A(1;1;1)$

$AM_t^2=(0-1)^2+(-2+t-1)^2+(t-1)^2=1+(t-3)^2+(t-1)^2=1+t^2-6t+9+t^2-2t+1=2t^2-8t+11$

$AM_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

3.b. $f(t)=2t^2-8t+11$ $\qquad f'(t)=4t-8$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$ $\qquad f(2)=8-16+11=3$

Le coefficient de t^2 est positif donc f admet un minimum en $t=2$ égal à 3.

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\sqrt{f(2)}=\sqrt{3}$ est le minimum de $\sqrt{f(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

AH est la distance minimale du point A à un point M de la droite Δ donc $AH=\sqrt{3}$.

4.a. $\mathscr{D}_1$ est la droite passant par $A(1;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{D}_1 :\ \begin{cases}x=2a+1\\y=a+1\\z=-a+1\end{cases}\quad a\in\mathbb{R}$

4.b. H_1 est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}_1$ et de la droite $\mathscr{D}_1$.

On résout le système : $\begin{cases}2x+y-z+2=0\\x=2a+1\\y=a+1\\z=-a+1\end{cases}$.

On obtient : $2\times(2a+1)+a+1-(-a+1)+2=0 \Leftrightarrow 4a+2+a+1+a-1+2=0 \Leftrightarrow 6a+4=0$

$\Leftrightarrow a=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$.

$x=2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+1=-\dfrac{4}{3}+1=-\dfrac{1}{3}$ $\qquad y=-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{1}{3}$ $\qquad z=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$ $\qquad H_1\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

5. $H_2\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ $\qquad H(0;0;2)$ $\qquad A(1;1;1)$ $\qquad H_1\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

$\overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-1\\\frac{1}{3}-1\\\frac{5}{3}-1\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AH_1}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\qquad (\overrightarrow{H_2H})\begin{pmatrix}0-\frac{4}{3}\\0-\frac{2}{3}\\2-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{H_2H}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH_1}=\overrightarrow{H_2H}$ donc le quadrilatère AH_1H_2H est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{AH_2}=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{AH_2}$ sont orthogonaux et le quadrilatère AH_1H_2H est un rectangle.