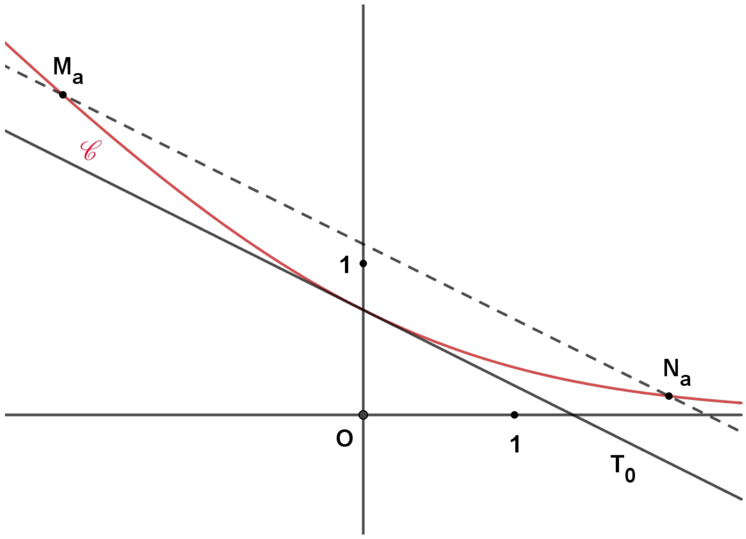
Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+e^{-x})$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1.a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

1.b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.

1.c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{-1}{1+e^{x}}$.

1.d. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

2.a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

2.b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x)\geqslant -\dfrac{1}{2}x+\ln(2)$.

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
On a donc $M_a(-a;f(-a))$ et $N_a(a;f(a))$.

3.a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x)-f(-x)=-x$.

3.b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) son parallèles.

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x, $f(x)=\ln(1+e^{-x})$.

$\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(1+e^{-x})=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})=+\infty$ soit $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

1.b. $\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1$ et $\lim_{X\to1}\ln(X)=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$ soit $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

La droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

1.c. $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\qquad u(x)=1+e^{-x}$ $\qquad u'(x)=-e^{-x}$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{x}}{e^{x}}\times\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=\frac{-e^{x}\times e^{-x}}{e^{x}+e^{x}\times e^{-x}}=\frac{-1}{e^{x}+1}=\frac{-1}{1+e^{x}}.$$

1.d. Pour tout nombre réel x, $1+e^{x}>0$ donc $f'(x)<0$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	$-$
f(x)	$+\infty$ ↘ 0

2.a. $f(0)=\ln(2)$ $\qquad f'(0)=\frac{-1}{1+e^{0}}=-\frac{1}{2}$

T_0: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $\qquad$ T_0: $y=-\frac{1}{2}x+\ln(2)$

2.b. Pour tout nombre réel x, $f''(x)=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}>0$.

La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.c. $\mathscr{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes en particulier au dessus T_0.

Pour tout réel x, $M(x;f(x))$ est au dessus de $P\left(x;-\frac{1}{2}x+\ln(2)\right)$ donc $f(x)\geqslant-\frac{1}{2}x+\ln(2)$.

3.a. $f(x)-f(-x)=\ln(1+e^{-x})-\ln(1+e^{x})=\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)-\ln(1+e^{x})=\ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right)-\ln(1+e^{x})$

$f(x)-f(-x)=\ln(1+e^{x})-\ln(e^{x})-\ln(1+e^{x})=-\ln(e^{x})=-x$.

3.b. Le coefficient directeur de (M_aN_a) est $m=\frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)}=\frac{-a}{2a}=-\frac{1}{2}$.

(M_aNa) et T_0 ont même coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ elles sont donc parallèles.