Exercice 2 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n par : $u_{n+1}=5u_n-4n-3$.

1.a. Démontrer que $u_1=12$.
1.b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
1.c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .

2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant n+1$.
2.b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-n-1$.
3.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
3.b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3.c. En déduire que que pour tout entier naturel n : $u_n=2\times5^n+n+1$.
3.d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant10^7$.

```
def suite ():
  u=3
  n=0
  while
    u=
    n=n+1
  return n
```

4.a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
4.b. Quelle est la valeur renvoyée par ette fonction ?

CORRECTION

1.a. $u_1=5u_0-4\times0-3=5\times3-3=12$

1.b. $u_2=5u_1-4\times1-3=5\times12-7=53$

1.c. $u_3=254$; $u_4=1253$; $u_5=6256$

On conjecture que la suite (u_n) est croissante.

On remarque $u_{n+1}\geqslant 4u_n$ donc on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant n+1$.

Initialisation

Pour $n=0$ $u_0=3$ $0+1=1$ donc $u_0\geqslant 0+1$;

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant n+1$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant n+1+1=n+2$.

Or $u_{n+1}=5u_n-4n-3\geqslant 5(n+1)-4n-3=5n+5-4n-3=n+2$

donc $u_{n+1}\geqslant n+2$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant n+1$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant n+1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3.a. Pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-n-1$.

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)-1=5u_n-4n-3-n-2=5(u_n-n-1)=5v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison $q=5$ et de premier terme $v_0=u_0-0-1=3-1=2$.

3.b. Pour tout entier naturel n $v_n=v_0\times q^n=2\times5^n$.

3.c. $v_n=u_n-n-1 \Leftrightarrow u_n=v_n+n+1$

Pour tout entier naturel n, $u_n=2\times5^n+n+1$.

4.a. On complète la 4ème ligne :

while $u<10**7$:

On complète la 5ème ligne :

u= $5*u-4n-3$

ou

u= $2\times5**n+n+1$

```
def suite ():
  u=3
  n=0
  while u<10**7:
    u= 5*u-4n-3
    n=n+1
  return n
```

4.b. Si on exécute le programme Python, la valeur renvoyée par la fonction suite() est : 10.

- On peut utiliser la calculatrice, pour calculer les termes de la suite jusque u_{10} .
- En devoir à la maison, on peut facilement utiliser un tableur.
- Pour cet exemple, il est facile de calculer mentalement les valeurs successives de u_n .
  On donne les résultats sous la forme d'un tableau.

$u_n=2\times5^n+n+1$

Dans la colonne 2×5^n on doit multiplier le terme précédent par 5, soit diviser ce terme par 2 et ajouter un zéro.
Tableau de valeurs

n	n+1	2×5^n	u_n
0	1	2	3
1	2	10	11
2	3	50	53
3	4	250	254
4	5	1250	1255
5	6	6250	6256
6	7	31250	31257
7	8	156250	156258
8	9	781250	781259
9	10	3906250	39062660
10	11	195312510	19531261