Exercice 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^x$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x)=1+xe^x$ **b.** $F(x)=(1+x)e^x$

c. $F(x)=(2+x)e^x$ **c.** $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^x$

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\ \begin{cases} x=2+r \\ y=1+r \\ z=-r \end{cases} \quad (r\in\mathbb{R}) \qquad (d_2)\ \begin{cases} x=1-s \\ y=-1+s \\ z=2-s \end{cases} \quad (s\in\mathbb{R})$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles
c. confondues **d.** non coplanaires

3. On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est : $2x-y+z-1=0$.

On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=2+u \\ y=4+u \\ z=1-u \end{cases} \quad (u\in\mathbb{R})$.

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P) **b.** incluse dans le plan (P)
c. strictement parallèle au plan (P) **d.** orthogonale au plan (P)

4. On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x-2y+z+1=0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x+y+z-6=0$.
Les plans (P_1) et (P_2) sont :

a. sécants et perpendiculaires **b.** confondus
c. sécants et non perpendiculaires **d.** strictement parallèles

5. On considère les points $E(1;2;1)$; $F(2;4;3)$ et $G(-2;2;5)$.
On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{FEG}$ vérifie :

a. $\alpha=90^\circ$ **b.** $\alpha>90^\circ$ **c.** $\alpha=0^\circ$ **d.** $\alpha\simeq 71^\circ$

CORRECTION

1. Réponse : a

Preuve non demandée

$F(x)=1+xe^x \qquad F'(x)=0+1\times e^x+xe^x=(x+1)e^x=f(x)$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc l'affirmation a est vraie.

2. Réponse : a

Preuve non demandée

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1) et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2).

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\vec{u}_1=\lambda\vec{u}_2$ donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc les affirmations b et c sont fausses.

Pour déterminer l'intersection des droites (d_1) et (d_2) on doit résoudre le système :

$$\begin{cases}2+r=1-s\\1+r=-1+s\\-r=2-s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}r+s=-1\\r-s=-2\\-r+s=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}r+s=-1\\r-s=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2r=-3\\2s=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}r=-\frac{3}{2} \text{ et } s=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en I.

$x_1=2-\frac{3}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad y_1=--\frac{3}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \qquad z_1=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \qquad I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

L'affirmation a est vraie.

3. Réponse : b

Preuve non demandée

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ).

$\vec{n}.\vec{v}=2\times1-1\times1+1\times(-1)=0$ donc (Δ) est parallèle au plan (P) ;

Le point $A(2;4;1)$ appartient à (Δ).

$2\times2-4+1-1=0$ donc A appartient au plan (P) donc (Δ) est incluse dans le plan (P).

4. Réponse : c

Preuve non demandée

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P_1) et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un cecteur normal au plan (P_2).

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles, les affirmations b et d sont fausses.

$\vec{n}_1.\vec{n}_2=1\times2-2\times1+1\times1=1\neq0$ les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas perpendiculaires.

Donc l'affirmation a est fausse.

Conclusion : l'affirmation c est vraie.

5. Réponse : d

Preuve non demandée

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$

$EF^2=1^2+2^2+2^2=9 \qquad EF=\sqrt{9}=3 \qquad EG^2=3^2+0^2+4^2=9+16=25 \qquad EG=\sqrt{25}=5$

$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=1\times3+2\times0+2\times4=11 \qquad \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=EF\times EG\times\cos(\widehat{FEG})=15\times\cos(\widehat{FEG})$

$\cos(\widehat{FEG}) = \frac{11}{15} = \frac{1}{3}$.

En utilisant la calculatrice :

$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 70{,}53$

Soit $71°$ arrondi à l'unité.