Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$f(x)=5x^2+2x-2x^2\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.a. Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
1.b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

3.a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $f''(x)=4(1-\ln(x))$.
3.b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
3.c. Dresser le tableau de variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
(On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$).

4.a. Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
4.b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ ainsi que le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5.a. En utilisant l'égalité $f'(\alpha)=0$, démontrer que : $\ln(\alpha)=\dfrac{4\alpha+1}{2\alpha}$.
En déduire que $f(\alpha)=\alpha^2+\alpha$.
5.b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$: $f(x)=5x^2+2x-2x^2\ln(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 5x^2+2x=0$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\ln(x)=0$ $\qquad$ donc $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=0$

1.b. $x>0 \qquad f(x)=x^2\left(5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}\right)=5 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f'(x)=5\times(2x)+2-4x\ln(x)-2x^2\times\left(\dfrac{1}{x}\right)=10x+2-4x\ln(x)-2x$

$f'(x)=8x-4x\ln(x)+2$

3.a. f' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f''(x)=8-4\ln(x)-4x\times\left(\dfrac{1}{x}\right)=8-4\ln(x)-4=4-4\ln(x)$

$f''(x)=4(1-\ln(x))$

3.b. On détermine le signe de $f''(x)$.

$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=e$

$f''(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(e)>\ln(x) \quad\Leftrightarrow\quad e>x>0$ (car $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$).

$f''(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(e)<\ln(x) \quad\Leftrightarrow\quad e<x$.

x	0		e		+∞
f "(x)	‖	+	0	−	

f est convexe sur $]0;e]$ et f est concave sur $[e;+\infty[$.

Le plus grand intervalle sur lequel $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes est $]0;e]$.

3.c. Tableau de variations de f'.

x	0		e		+∞
f "(x)	‖	+	0	−	
f '(x)	‖ 2	↗	4e+2	↘	-∞

$f'(e)=4e+2$.

4.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;e]$: $f'(x)>2$ donc l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0;e]$.

f' est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[e;+\infty[$, à valeurs dans $]-\infty;4e+2]$.

$f(e)=4e+2>0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

En utilisant la calculatrice par balayage ou dichotomie, on obtient :

$7{,}87<\alpha<7{,}88$.

4.b. Si $0<x\leqslant e$ alors $f'(x)>2>0$

Si $e\leqslant x<\alpha$ alors $f'(e)\geqslant f'(x)>f'(\alpha)=0$

Si $\alpha<x$ alors $f'(x)>f'(\alpha)=0$

On obtient le tableau de variations de f.

x	0		α		+∞
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	f(α)	↘	-∞

5.a. $f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 8\alpha-4\alpha\ln(\alpha)+2=0 \Leftrightarrow 4\alpha\ln(\alpha)=8\alpha+2 \Leftrightarrow \ln(\alpha)=\frac{8\alpha+2}{4\alpha}=\frac{4\alpha+1}{2\alpha}$.

$f(\alpha)=5\alpha^2+2\alpha-2\alpha^2\times\frac{4\alpha+1}{2\alpha}=5\alpha^2+2\alpha-\alpha(4\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$

5.b. $0<7{,}87<\alpha<7{,}88$

$61{,}936<\alpha^2<62{,}095$ car la fonction carré est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$69{,}806<f(\alpha)<69{,}975$.

L'encadrement obtenu est d'amplitude supérieure à 10^{-1}.

Si on veut obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-1} il suffit de choisir un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

$7{,}873<\alpha<7{,}874$

$61{,}984129<\alpha^2<61{,}999876$

$69{,}857129<f(\alpha)<69{,}873876$

$69{,}8<f(\alpha)<69{,}9$