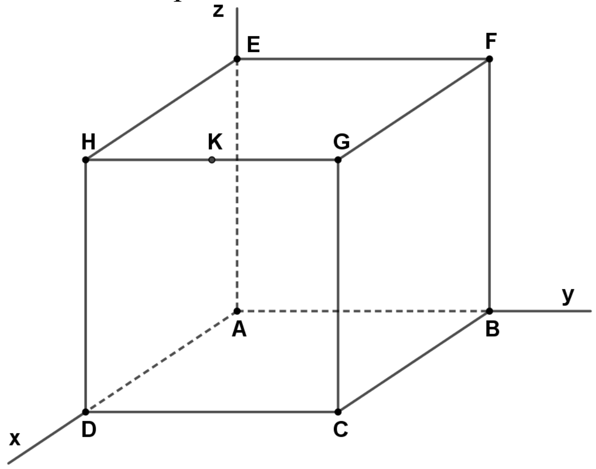
Exercice 1 — 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.



On note K le milieu du segment [HG].
On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$.

1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.

2.a. Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.
2.b. Calculer l'aire du triangle FGC.
2.c. Calculer le volume du tétraèdre FGCK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur correspondante.

3.a. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Démontrer que $\vec{n}$ est normal au plan (CFK).

3.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est : $x+2y+z-3=0$.

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).
5.a. Déterminer les coordonnées du point L.
5.b. En déduire que $LG=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. En utilisant la question 2, déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

CORRECTION

1. Le point F appartient à la face opposée à CGHD. La droite (CK) est contenue dans le plan (CGH), donc le point F n'appartient pas à la droite (CK) et les points C, F et K ne sont pas alignés. Conséquence ces points définissent un plan.

2.a. $KG=\frac{1}{2}$ $GF=1$ et $GC=1$.

2.b. Le triangle FGC est rectangle en G.

$\mathcal{A}_{FGC}=\frac{1}{2}\times GC\times GF=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ (unité d'aire).

2.c. (GK) est orthogonale au plan (CFG) donc KG est la hauteur du tétraèdre KCFG associée à la base CFG.

$V_{KCFG}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ (unité de volume).

3.a. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (CFK) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (CFK) par exemple $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$.

$C(1;1;0)$ $F(0;1;1)$ $K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}0\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{CF}=1\times(-1)+2\times 0+1\times 1=-1+0+1=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{CK}=1\times 0+2\times(-0{,}5)+1\times 1=-1+1=0$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (CFK).

3.b. Le plan (CFK) est le plan passant par $C(1;1;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

M appartient au plan (CFK) si et seulement si $\overrightarrow{CM}.\vec{n}=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-1)\times 1+(y-1)\times 2+(z-0)\times 1=0$
$\Leftrightarrow$ $x-1+2y-2+z=0$ $\Leftrightarrow$ $x+2y+z-3=0$

4. Δ est la droite passant par $G(1;1;1)$ et orthogonale au plan (CFK) donc Δ est la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

M appartient à la droite Δ si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{GM}=t.\vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x-1=1\times t\\y-1=2\times t\\z-1=1\times t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=t+1\\y=2t+1\\z=t+1\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

5.a. Pour déterminer les coordonnées du point L, on résout le système :

$$\begin{cases}x+2y+z-3=0\\x=t+1\\y=2t+1\\z=t+1\end{cases}$$

On obtient $t+1+2(2t+1)+t+1-3=0$ $\Leftrightarrow$ $6t+1=0$ $\Leftrightarrow$ $t=-\frac{1}{6}$

$x=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$ $y=-\frac{2}{6}+1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $z=-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$ $L\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};\frac{5}{6}\right)$

5.b. $L\left(\frac{5}{6};\frac{4}{6};\frac{5}{6}\right)$ $\quad$ $G(1;1,1)$

$$LG^2=(1-5\times 6)^2+\left(1-\frac{4}{6}\right)^2+\left(1-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36} \qquad LG=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

6. LG est la hauteur du tétraèdre KCFG associée à la base CFK.

$$V_{KCFG}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\times LG\times \mathscr{A}_{CFK} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{\sqrt{6}}{6}\times \mathscr{A}_{CFK} \Leftrightarrow \frac{6}{4\sqrt{6}}=\mathscr{A}_{CFK} \Leftrightarrow \mathscr{A}_{CFK}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$ (unité d'aire)