Exercice 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$, démontrer que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

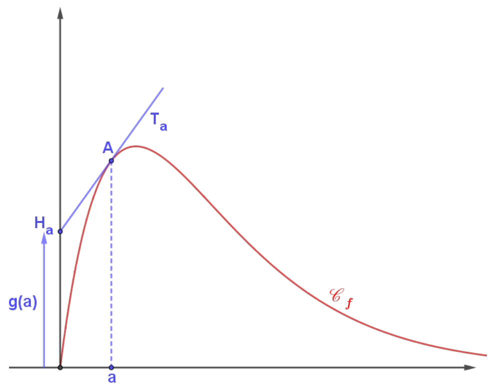
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\dfrac{367}{1000}$.

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f''(x)=\mathrm{e}^x(x-2)$.
Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0;+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_A et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-dessous.



6.a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est : $y=[(1-a)\mathrm{e}^{-a}]x+a^2\mathrm{e}^{-a}$.
6.b. En déduire l'expression de $g(a)$.
6.c. Démontrer que $g(a)$ est maximal lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=xe^{-x}=\dfrac{x}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ et $f'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e-x)=(1-x)e^{-x}$.

3. Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de $(1-x)$.

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ $\quad 1-x>0 \Leftrightarrow 1>x\geqslant 0$ $\quad 1-x<0 \Leftrightarrow 1<x$

Tableau de variations de f

$f(0)=0$ et $f(1)=\dfrac{1}{e}$.

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

4. $f(1)=\dfrac{1}{e}$ $\qquad 0{,}3678<\dfrac{1}{e}<0{,}679$ $\qquad \dfrac{1}{e}>0{,}367=\dfrac{367}{1000}$

. f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ à valeurs dans $\left[0;\dfrac{1}{e}\right]$ et $0{,}367$ appartient à $\left[0;\dfrac{1}{e}\right]$ le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0{,}367$ admet une unique solution α_1 appartenant à $[0;1[$.

. f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ à valeurs dans $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0{,}367$ admet une unique solution α_2 appartenant à $]1;+\infty[$.

. Conclusion

L'équation $f(x)=0{,}367$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 .

5. f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$.

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$

$(1-x)'=-1$ et $(e^{-x})'=-e^{-x}$

$f''(x)=-1\times e^{-x}+(1-x)\times(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

Le signe de $f''(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de $(x-2)$.

x	0		2		$+\infty$
f ''(x)		−	0	+	
convexité f		f est concave		f est convexe	

Le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion.

6. Le repère est orthogonal et non orthonormé.

6.a. $f'(a)=(1-a)e^{-a}$ $\qquad f(a)=a\,e^{-a}$

$y-f(a)=f'(x-a)(x-a)$

$y-a\,e^{-a}=[(1-a)e^{-a}]x-a(1-a)e^{-a}$

$y=[(1-a)e^{-a}]x+ae^{-a}-ae^{-a}+a^2e^{-a}$

T_a : $y=[(1-a)e^{-a}]x+a^2e^{-a}$

6.b. $g(a)=a^2e^{-a}$

On détermine les variations de la fonction g définie par $g(x)=x^2e^{-x}$ sur $[0;+\infty[$.

$g'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

Tableau de variations de g

x	0		2		$+\infty$
g '(x)		+	0	−	
g(x)	0	↗	$\frac{2}{e^2}$	↘	0

g admet un maximum pour $x=2$.

Le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion de la courbe.