Exercice 3 — 5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$.

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

2. On considère la fonction terme ci-dessous de manière incomplète en langage Python :

```
def terme(n):
  u= . . .
  for i in range(n):
    u= . . . .
  return (u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « i in range(n) » signifie que i varie de 0 à n-1.
Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction terme(n) renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $]-3;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{-x-4}{x+3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=f(u_n)$.
Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3;+\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$-2<u_{n+1}\leqslant u_n$.

5. En déduire que (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$.

6.a. Donner v_0 .

6.b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

6.c. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=\dfrac{1}{n+0,5}-2$.

6.d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

CORRECTION

1. $u_1=\dfrac{-u_0-4}{u_0+3}=\dfrac{-4}{3}=-\dfrac{4}{3}$

$u_2=\dfrac{-u_1-4}{u_1+3}=\left(\dfrac{4}{3}-4\right):\left(-\dfrac{4}{3}+3\right)=\left(-\dfrac{8}{3}\right):\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{8}{3}\times\dfrac{3}{5}=-\dfrac{8}{5}$

2.

```
def terme(n):
  u= 0
  for i in range(n):
    u= (-u - 4)/(u + 3)
  return (u)
```

3. f est dérivable sur $]-3;+\infty[$.

$f'(x)=\dfrac{(x+3)\times(-1)-(-x-4)\times 1}{(x+3)^2}=\dfrac{-x-3+x+4}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{(x+3)^2}>0$

donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

4. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $-2<u_{n+1}\leqslant u_n$.

Initialisation

$u_0=0$ et $u_1=-\dfrac{8}{5}$, $-2=-\dfrac{10}{5}$ donc $-2<-\dfrac{8}{5}\leqslant 0$ soit $-2<u_1\leqslant u_0$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $-2<u_{n+1}\leqslant u_n$ et on doit démontrer que $-2<u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

Or f est strictement croissante sur $]-3;+\infty[$, si $-2<u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ $\Leftrightarrow$ $u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

D'autre part, $u_{n+2}+2=\dfrac{-u_{n+1}-4}{u_{n+1}+3}+2=\dfrac{-u_{n+1}-4+2u_{n+1}+6}{u_{n+1}+3}=\dfrac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+3}$.

Si $-2<u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $u_{n+1}+2>0$ (et $u_{n+1}+3>0$) donc $u_{n+2}+2>0$ soit $-2<u_{n+2}$.

On a bien démontré que si $-2<u_{n+1}\leqslant u_n$ alors $-2<u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $-2<u_{n+1}\leqslant u_n$.

5. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante, et on a $-2<u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est minorée.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

6. Pour tout entier naturel n, $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$.

6.a. $v_0=\dfrac{1}{u_0+2}=\dfrac{1}{2}$.

6.b. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}+2}-\dfrac{1}{u_n+2}$

$v_{n+1}=(1):(u_{n+1}+2)=(1):\left(\dfrac{-u_n-4}{u_n+3}+2\right)=(1):\left(\dfrac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}\right)=1\times\dfrac{u_n+3}{u_n+2}=\dfrac{u_n+3}{u_n+2}$

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+3}{u_n+2}-\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{u_n+2}{u_n+2}=1$

(v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0=\frac{1}{2}$ et de raison $r=1$.

6.c. Pour tout entier naturel n :

$$v_n=v_0+n\times r=\frac{1}{2}+n\times 1=n+0,5$$

$$v_n=\frac{1}{u_n+2} \text{ donc } u_n+2=\frac{1}{v_n}=\frac{1}{n+0,5} \text{ et } u_n=\frac{1}{n+0,5}-2$$

6.d. $\lim_{n\to+\infty}(n+0,5)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+0,5}\right)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=-2$.