

## Exercice 3

5 points

Thème: fonction exponentielle, algorithmique

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- Affirmation :** la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - x$  est convexe.
- Affirmation :** L'équation  $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$  admet  $\ln(3)$  comme unique solution dans  $\mathbb{R}$ .
- Affirmation :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$ .
- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$  et  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ .  
**Affirmation :**  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui prend la valeur 5 quand  $x = 0$ .
- On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste  $L$  de nombres en paramètre.  
On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste  $L$ .

```
def mystere(L):  
    S=0  
    for i in range(len(L)):  
        S=S+L[i]  
    return S/len(L)
```

**Affirmation :** L'exécution de `mystere([1,9,9,5,0,3,6,12,0,5])` renvoie 50.

**CORRECTION**

**1. Affirmation 1 : VRAIE**

Pour tout nombre réel  $x$   $f(x)=e^x-x$  et  $f'(x)=e^x-1$  et  $f''(x)=e^x>0$   
 donc **f est une fonction convexe.**

**2. Affirmation 2 : VRAIE**

Pour tout nombre réel  $x$   $e^x>0$  donc  $e^x+2>2$  et  $e^x+2\neq 0$ .

$$(2e^x-6)(e^x+2)=0 \Leftrightarrow 2e^x-6=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{6}{2}=3 \Leftrightarrow x=\ln(3)$$

**3. Affirmation 3 : FAUSSE**

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-x} = \frac{e^{2x}}{e^x} \times \frac{1-e^{-2x}}{1-xe^{-x}} = \frac{(e^x)^2}{e^x} \times \frac{1-e^{-2x}}{1-xe^{-x}} = e^x \times \frac{1-e^{-2x}}{1-xe^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \quad xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x-x} = +\infty.$$

**4. Affirmation 4 : VRAIE**

Pour tout nombre réel  $x$   $f(x)=(6x+5)e^{3x}$  et  $F(x)=(2x+1)e^{3x}+4$

$$(2x+1)' = 2 \quad (e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$F'(x) = 2e^{3x} + 3 \times (2x+1)e^{3x} = (6x+5)e^{3x} = f(x)$$

$$F(0) = 1 \times e^0 + 4 = 5$$

**F est la primitive de f sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0)=5$ .**

**5. Affirmation 5 : FAUSSE**

La liste  $[1,9,9,5,0,3,6,12,0,5]$  contient 10 nombres donc  $\text{len}(L)$  est égal à 10.

for  $i$  in range( $\text{len}(L)$ )

$i$  prend les 10 valeurs entières de 0 à 9.

$$L[0]=1 \quad (\text{premier nombre de la liste})$$

$$S=0+1=1$$

$$L[1]=9 \quad (\text{deuxième nombre de la liste})$$

$$S=1+9=10$$

.

.

$$L[9]=5$$

$$S=1+9+9+5+0+3+6+12+0+5=50$$

**Le nombre renvoyé est  $\frac{50}{10}=5 \neq 50$ .**

