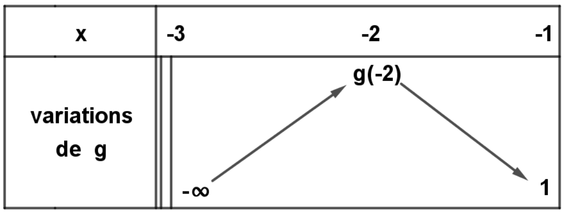
Exercice 4 *6 points*

Thème: suites - fonctions

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=0{,}9\,u_n-0{,}3$.

1.a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2\times 0{,}9^n-3$.
1.b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-3<u_n\leqslant -1$.
1.c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
1.d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur]-3 ;-1] par : $g(x)=\ln(0{,}5x+1{,}5)-x$.
2.a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1).



2.b. En déduire que l'équation $g(x)=0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
$v_n=\ln(0{,}5\,u_n+1{,}5)$.
3.a. En utilisant la formule donnée à la question **1.a.** démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison ln(0,9).
3.b. Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n=v_n$ si, et seulement si $g(u_n)=0$
3.c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k\in\mathbb{N}$ pour lequel $u_k=\alpha$.
3.d. En déduire qu'il existe aucun rang $k\in\mathbb{N}$ pour lequel $u_k=v_k$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. (u_n) est la suite définie par $u_0=-1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,9u_n-0,3$.
On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n=2\times0,9^n-3$.
Initialisation
$u_0=-1$ et $2\times0,9^0-3=2\times1-3=-1$.
Donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n=2\times0,9^n-3$ et on doit démontrer que $u_{n+1}=2\times0,9^{n+1}-3$.
Or $u_{n+1}=0,9u_n-0,3=0,9\times(2\times0,9^n-3)-0,3=2\times0,9^{n+1}-0,27-0,3=2\times0,9^{n+1}-3$
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n=2\times0,9^n-3$.

1.b. Pour n=0 $u_0=-1$ donc $-3<u_0\leqslant-1$.
Pour $n>0$ on a $0<0,9\leqslant1$ donc $0<0,9^n\leqslant1^n=1$ (car la fonction $x \rightarrow x^n$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$) et $2\times0<2-09^n\leqslant2\times1$ $\Leftrightarrow$ $0<2\times0,9^n\leqslant2$ $\Leftrightarrow$ $0-3<2\times0,9^n-3\leqslant2-3$ $\Leftrightarrow$ $-3<u_n\leqslant-1$

1.c. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}-u_n=2\times0,9^{n+1}-3-(2\times0,9^n-3)=2\times(0,9-1)=-0,2\times0,9^n<0$
La suite (u_n) est strictement décroissante.

1.d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par -3 donc **la suite (u_n) est convergente.**
Pour tout entier naturel n, $u_n=2\times0,9^n-3$.
$0<0,9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0,9^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$.

2.a. $x\in]-3;-1]$ $g(x)=\ln(05x+1,5)-x$.
Remarque : $0,5x+1,5>0$ $\Leftrightarrow$ $x>-3$
g est dérivable sur $]-3;-1]$.
$$g'(x)=\frac{0,5}{0,5x+1,5}-1=\frac{0,5-0,5x-1,5}{0,5x+1,5}=\frac{-0,5x-1}{0,5x+1,5}$$
$-0,5x-1=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-2$
$-0,5x-1>0$ $\Leftrightarrow$ $x<-2$
$-0,5x+1,5<0$ $\Leftrightarrow$ $x>-2$
La fonction g est strictement croissante sur $]-3;-2]$ et strictement décroissante sur $[-2;-1]$ et g admet un maximum en -2.
Si $-3<x\leqslant-1$ alors $0<0,5x+1,5$
$\lim\limits_{x\to-3}(0,5x+1,5)=0$ et $\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\ln(0,5x+1,5)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}g(x)=-\infty$.
$g(-1)=\ln(-0,5+1,5)+1=\ln(1)+1=1$.
$g(-2)=\ln(0,5)+2=1,31$ à 10^{-2} près. Donc $g(-2)>1$.

2.b. g est continue et strictement croissante sur]-3 ;-2] à valeurs dans $]-\infty;g(-2)]$, $0\in]-\infty;g(-2)]$ donc admet un unique antécédent α appartenant à]-3 ;-2] donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à]-3 ;-2].
g est strictement décroissante sur [-2 ;-1] donc pour tout réel x de l'intervalle [-2 ;-1] $g(x)\leqslant g(-1)=1$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle [-2 ;-1].
Conclusion
L'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à]-3 ;-1].
En utilisant la calculatrice on obtient :
$-2,889<\alpha<-2,888$ $\alpha=-2,889$ à 10^{-3} près .

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3.a. Pour tout entier naturel n $v_n = \ln(0{,}5\,u_n + 1{,}5)$.
(rappel : $-3 < u_n \leqslant -1$ et $0{,}5\,u_n + 1{,}5 > 0$)
$u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$ donc $0{,}5\,u_n + 1{,}5 = 0{,}9^n + 1{,}5 - 1{,}5 = 0{,}9^n$.
$v_n = \ln(0{,}9^n) = n \times \ln(0{,}9)$;
(v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 0$ et de raison $r = \ln(0{,}9)$.

3.b. Pour tout entier naturel n :
$g(u_n) = \ln(0{,}5\,u_n + 1{,}5) - u_n = v_n - u_n$.
Donc $v_n = u_n \Leftrightarrow g(u_n) = 0$

3.c. La suite (u_n) est strictement décroissante on détermine en utilisant la calculatrice un encadre de α par deux termes consécutifs de la suite.
On obtient : $u_{27} = -2{,}8953 > \alpha$ et $u_{28} = -2{,}8837 < \alpha$ donc $u_{28} < \alpha < u_{27}$.
Il n'existe pas d'entier naturel k tel que $u_k = \alpha$.

3.d. $v_k = u_k \Leftrightarrow g(u_k) = 0 \Leftrightarrow u_k = \alpha$
Il n'existe pas d'entier naturel k tel que $v_k = u_k$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés