Exercice 1 5 points

Thème: probabilités - suites

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

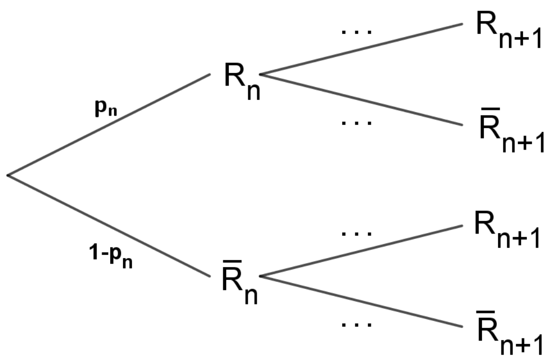
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que :

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'événement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la $n^{\text{ième}}$ séance »,
- p_n la probabilité de l'événement R_n. On considère que $p_0=0{,}6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, par n, on a : $p_{n+1}=0{,}6\,p_n+0{,}3$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n=p_n-0{,}75$.

3.a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $p_n=0{,}75-0{,}15\times 0{,}6^n$.

3.c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite L.

3.d. Interpréter la valeur de L dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0{,}75$ et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse de 10 haies.

3. Calculer $P(X\geqslant 9)$, à 10^{-3} près.

CORRECTION

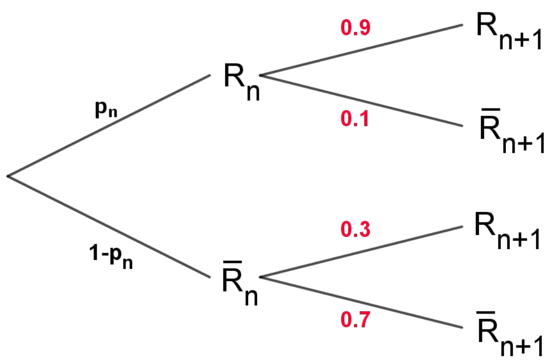
Partie A

1. L'énoncé précise :

. Si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant donc :
$P_{R_n}(R_{n+1})=0{,}9$ et $P_{R_n}(\bar{R}_{n+1})=1-0{,}9=0{,}1$.

. Si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas le lendemain donc :
$P_{\bar{R}_n}(\bar{R}_{n+1})=0{,}7$ et $P_{\bar{R}_n}(R_{n+1})=1-0{,}7=0{,}3$.

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant la formule des probabilités totales :

$p_{n+1}=P(R_{n+1})=P(R_n\cap R_{n+1})+P(\bar{R}_n\cap R_{n+1})$

$p_{n+1}=P(R_n)\times P_{R_n}(R_{n+1})+P(\bar{R}_n)\times P_{\bar{R}_n}(R_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times 0{,}9+(1-p_n)\times 0{,}3$

$p_{n+1}=0{,}6\,p_n+0{,}3$

3. Pour tout entier naturel n, $u_n=p_n-0{,}75 \quad \Leftrightarrow \quad p_n=u_n+0{,}75$

3.a. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}75=0{,}6\,p_n+0{,}3-0{,}45=0{,}6\times(u_n+0{,}75)-0{,}45=0{,}6\,p_n+0{,}45-0{,}45$

$u_{n+1}=0{,}6\,u_n$

donc **(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=p_0-0{,}75=0{,}6-0{,}75=-0{,}15$ et de raison 0,6.**

3.b. Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0\times q^n=-0{,}15\times 0{,}6^n$ et $p_n=0{,}75+u_n=0{,}75-0{,}15\times 0{,}6^n$

3.c. $0<0{,}6<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=0{,}75$.

(p_n) est une suite convergente et $L=0{,}75$.

3.d. **À long terme , l'athlète franchira la haie avec une probabilité de 0,75.**

Partie B

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
L'athlète doit franchir une haie.
S succès : « l'athlète franchit la haie » la probabilité de succès est $p=P(S)=0{,}75$.
$\bar{S}$ échec : « l'athlète ne franchit pas la haie » la probabilité de l'échec $q=P(\bar{S})=1-0{,}75=0{,}25$.
Le franchissement des haies est indépendant des unes et des autres pour le 400 m.
Donc on effectue 10 épreuves indépendantes. X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves. **La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}45$.**

2. La probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies est : $P(X=10)=0{,}75^{10}=0{,}056$ à 10^{-3} près .

3. En utilisant la calculatrice :
$P(X\geqslant 9)=0{,}244$ à 10^{-3} près.

