Exercice 2 — 5 points

Thème: géométrie de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère :

- le point $A(1;-1;-1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation : $5x+2y+4z=17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x+14y+3z=19$;
- la droite $\mathscr{D}$ d représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=3-2t \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3.a. Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.
3.b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t;-t;3-2t)$.
On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t)=AM^2$.
4.a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t)=9t^2-18t+17$.
4.b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3;-1;1)$.

5. On note H le point de coordonnées $(3;-1;1)$.
Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

CORRECTION

1. $\vec{N}_1\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ et $\vec{N}_2\begin{pmatrix}10\\14\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$.

Les vecteurs $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ ne sont ppas colinéaires (il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\vec{N}_2=\lambda\vec{N}_1$) donc **les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.**

2. On peut déterminer par le calcul l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ou :

$\mathscr{D}$ est la droite passant par le point $K(1;0;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

$\vec{N}_1.\vec{u}=5\times2+2\times(-1)+4\times(-2)=10-2-8=0$ $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}_1$ et $5\times1+2\times0+4\times3=5+12=17$
K appartient à $\mathscr{P}_1$ et la droite $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}_1$.
$\vec{N}_2.\vec{u}=10\times2+14\times(-1)+3\times(-2)=20-14-6=0$ et $10\times1+14\times0+3\times3=10+9=19$ la droite $\mathscr{D}$ est donc contenue dans le plan $\mathscr{P}_2$.
Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles donc ils sont sécants et leur droite d'intersection est $\mathscr{D}$.

3.a. $A(1;-1;-1)$ $\mathscr{P}_1$: $5x+2y+4z=17$.
$5\times1+2\times(-1)+4\times(-1)=5-4-2=-1\neq17$ **donc le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}_1$.**

3.b. La droite $\mathscr{D}$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}_1$ et le point A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$ donc **le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.**

4. $M(1+2t;-t;3-2t)$ $A(1;-1;-1)$

4.a. $f(M)=AM^2=(1+2t-1)^2+(-t+1)^2+(3-2t+1)^2=(2t)^2+(-t+1)^2+(4-2t)^2$
$f(M)=AM^2=4t^2+t^2-2t+1+16-16t+4t^2=9t^2-18t+17$.

4.b. La distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal (car la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$).
$AM^2=9t^2-18t+17$
(Pour trouver le minimum, on peut calculer la dérivée du trinôme ou écrire sa forme canonique).
$9t^2-18t+17=9t^2-18t+9-9+17=9(t-1)^2+8$.
Le minimum de AM^2 est obtenu pour $t=1$ et ce minimum est égal à 8.
Le point M a alors pour coordonnées $(1+2\times1;-1;3-2\times1)$ soit $(3;-1;1)$.

5. $H(3;-1;1)$ H appartient à la droite $\mathscr{D}$ (car M appartient à la droite $\mathscr{D}$) $A(1;-1;-1)$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}=2\times2+0\times(-1)+2\times(-2)=4-4=0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et les droites (AH) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en H **donc la droite (AH) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.**