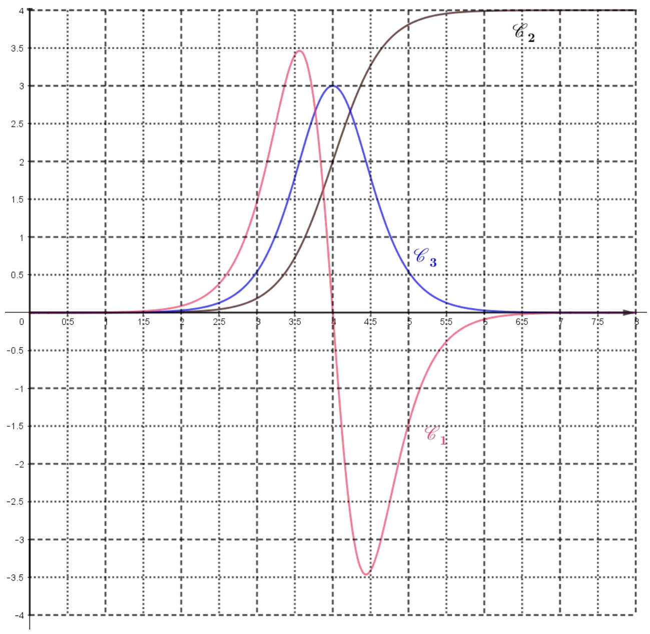
Exercice 3 — 5 points

Thème: étude de fonctions

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la pécision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Soit un réel k strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{4}{1+e^{-kx}}$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Prouver que $g'(0)=k$ ...
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion aupoint d'abscisse 0.

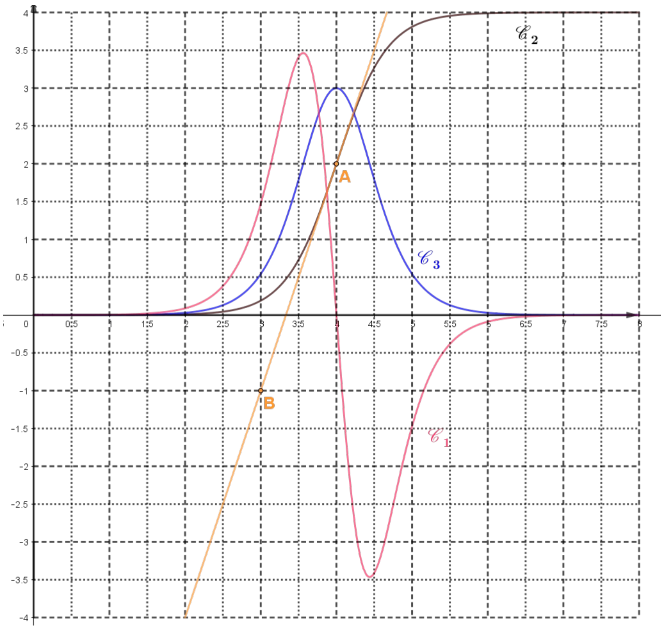
▷ Calcul formel	
1	g(x)=4/(1+e^(-kx)) → $g(x)=\dfrac{4}{e^{-kx}+1}$
2	Simplifier(g''(x)) → $g''(x)=-4e^{kx}(e^{kx}-1)\dfrac{k^2}{(e^{kx}+1)^3}$

CORRECTION

Partie A

1. $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sous les courbes représentatives de fonctions f_1 et f_2 positives sur [0,8].
$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une fonction f_1 positive sur]0;4[et négative sur]4;8[donc non monotone sur [0;8]. Donc f_2 et f_3 ne sont pas la dérivée de f_1 et $f_1 = f''$.
f_3 est croissante sur [0;4] et décroissante sur [4;8] donc $f_3 = f'$ et $f_2 = f$ (f est croissante sur [0;8]).
$\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de f ; $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de f ; $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de f'' .

2. La tangente à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4 passe par les points A(4;2) et B(3 ;-1).
Le coefficient directeur de cette tangente de cette tangente est : $\dfrac{5+1}{5-3} = \dfrac{6}{2} = 3$.



3. Par lecture graphique, il y a 3 points d'inflexion d'abscisse : 2 ; 4 et 5.

Partie B

1. $g(x) = \dfrac{4}{1+e^{-kx}}$ (k est un nombre réel strictement positif).

$\lim\limits_{x \to +\infty} -kx = -\infty$; $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{4}{1} = 4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -kx = +\infty$; $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

2. $(e^{-kx})' = -k\,e^{-kx}$ $\quad g'(x) = \dfrac{4k\,e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ $\quad g'(0) = \dfrac{4k\,e^{0}}{(1+e^{0})^2} = \dfrac{4k}{2^2} = k$.

3. Pour tout nombre réel x : $-4e^{kx} \times \dfrac{k^2}{(1+e^{kx})^3} < 0$ donc le signe de $g''(x)$ est le signe de $1-e^{kx}$.

$1-e^{kx}=0 \Leftrightarrow e^{kx}=1 \Leftrightarrow kx=0 \Leftrightarrow x=0$
$1-e^{kx}>0 \Leftrightarrow e^{0}>e^{kx} \Leftrightarrow 0>kx \Leftrightarrow 0>x$
$1-e^{kx}<0 \Leftrightarrow e^{0}<e^{kx} \Leftrightarrow 0<kx \Leftrightarrow 0<x$.

Remarques

. $g(x) = \dfrac{4}{1+e^{-kx}} = \dfrac{4e^{kx}}{1+e^{kx}}$

. Pour la figure on a choisi $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-3(x-4)}}$

