Exercice 4 5 points

Thèmes: suites - fonction logarithme - algorithmique

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

2. **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.

3. **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$.
   Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle [-3;1].

5. On considère la fonction **mystère** définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.
   On rappelle que len(L) renvoie la longueur, c'est à dire le nombre d'éléments de la liste L.

```
def mystère(L):
  M=L[0]   # on initialise M avec le premier élément dela liste L
  for i in range(len(L)):
    if L[i]>M:
      M=L[i]
  return M
```

   Affirmation : L'exécution de **mystère**([2,3,7,0,6,3,2,0,5]) renvoie 7.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Pour tout entier naturel n : $|u_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1$ car $1 \leqslant n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant 1$

donc (u_n) est bornée.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

Exemple :

Soit (u_n) la suite telle que $u_n = (-1)^n$.

$|u_n| = 1$ donc la suite est bornée et (u_n) n'est pas une suite convergente.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

Exemple :

(u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Pour tout entier naturel n.

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

(u_n) est une suite croissante.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) est convergente.

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Pour tout nombre réel x :

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$

$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

$$f''(x) = \frac{(x^2+2x+2) \times 2 - (2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+4-xx^2-8x-4}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$$

$-2x^2 - 4x = -2x(x+2)$

f est convexe sur [-2;0].

5. Affirmation 5 : VRAIE

L est une liste de nombres. Exemple : [2,3,7,0,6,3,2,0,5].

l en L est la longueur de L c'est à dire le nombre de nombres de la liste

l en L est égal à 9 pour l'exemple.

L'instruction « for i range(9) » veut dire i prend successivement les 9 valeurs entières de 0 à 8.

L[0] est le premier nombre de la liste 2 pour l'exemple.

L[5] est le sixième nombre de la liste 3 pour l'exemple.

M=L[0]=2 donc M=2
L[1]=3>M donc M=3
L[2]=7>M donc M=7
L[3]=0<M donc M=7

Le programme renvoie le plus grand nombre de la liste 7 pour l'exemple.