Exercice 1 *5 points*

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi.
L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets commun ou rare sont disponibles, des épées ou des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :
. la probabilité de tirer un objet rare est de 7 %;
. si on tire un objet rare , la probabilité que ce soit une épée est de 80 %;
. si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet . On note :
. R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
. E l'événement « le joueur tire une épée » ;
. $\bar{R}$ et $\bar{E}$ sont les événements contraires de R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.

2. Calculer la probabilité de tirer une épée.

3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare.
Arrondir le résultat au millième .

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis.
Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable X.
Préciser ses paramètres et son espérance.

2. Déterminer $P(X<6)$. Arrondir le résultat au millième.

3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

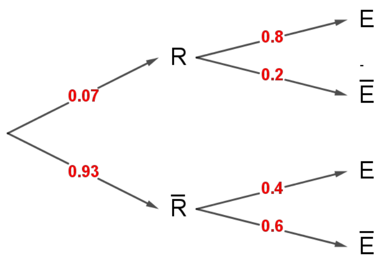
4. Les développeurs du jeu vidéo, veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.
Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.
Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif.
On veillera à détailler la démarche mise en place.

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

- La probabilité de tirer un objet rare est de 7 % donc $P(R)=\frac{7}{100}=0{,}07$ et $P(\bar{R})=1-P(R)=1-0{,}07=0{,}93$
- Si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % donc $P_R(E)=\frac{80}{100}=0{,}8$ et $P_R(\bar{E})=1-0{,}8=0{,}2$
- Si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 40 % donc $P_{\bar{R}}(E)=\frac{40}{100}=0{,}4$ et $P_{\bar{R}}(\bar{E})=1-0{,}4=0{,}6$
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



$P(R\cap E)=P(R)\times P_R(E)=0{,}07\times 0{,}8=0{,}056$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(E)=P(R\cap E)+P(\bar{R}\cap E)$
$P(\bar{R}\cap E)=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(E)=0{,}93\times 0{,}4=0{,}372$
$P(E)=0{,}056+0{,}372=0{,}428$.

3. On nous demande de calculer $P_E(R)$

$$P_E(R)=\frac{P(E\cap R)}{P(E)}=\frac{0{,}056}{0{,}428}=\frac{56}{428}$$

$P_E(R)=0{,}131$ arrondi au millième.

Partie B

1. On considère la loi de Bernoulli suivante :
le joueur remporte un défi
Succès S : « le joueur tire un objet rare » $P(S)=0{,}07$
Échec $\bar{S}$: « le joueur tire un objet commun » $P(\bar{S})=1-0{,}07=0{,}93$.
Le joueur remporte 30 défis, les tirages successifs sont considérés comme indépendants donc X la variable aléatoire, égale au nombre de succès en 30 tirages, admet pour loi de probabilité : la loi binomiale de paramètres : $n=30$ et $p=0{,}07$.
L'espérance mathématique de X est $E(X)=n\times p=30\times 0{,}07=2{,}1$.

2. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(X<6)=0{,}984$ arrondi au millième.

3. $k\in\mathbb{N}$ $P(X\geqslant k+1)=1-P(X\leqslant k)$
$k=0$ $P(X\geqslant 0)=1$
$k=1$ $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$
$k=2$ $P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$

Si $k \geqslant 2$ alors $P(X \geqslant k) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - ... - P(X=k-1)$
La suite $(P(X \geqslant k))$ est décroissante.
En utilisant la calculatrice (on arrondit au millième).
$P(X \geqslant 1) = 1 - 0,113 = 0,887$
$P(X \geqslant 2) = 1 - 0,113 - 0,256 = 0,631$
$P(X \geqslant 3) = 1 - 0,113 - 0,256 - 0,279 = 0,351$
Si $k \geqslant 3$ alors $P(X \geqslant k) \leqslant P(X \geqslant 3) < 0,5$ et $P(X \geqslant 2) > 0,5$.
La plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est **2.**

4. Le joueur remporte **N** défis et on veut que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$.
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$
$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geqslant P(X=0)$
Or $P(X=0) = 0,07^0 \times 0,93^N = 0,93^N$
$\Leftrightarrow 0,05 \geqslant 0,93^N$
la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln(0,05) \geqslant \ln(0,93^N) \Leftrightarrow \ln(0,05) \geqslant N \times \ln(0,93)$
$0 < 0,93 < 1$ donc $\ln(0,93) < 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \leqslant N$
en utilisant la calculatrice, on obtient : $\dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} = 41,3$ (arrondi au dixième).
42 est le nombre minimal d'objets à tirer pour avoir la probabilité, qu'un joueur obtienne au moins un objet rare, soit supérieure ou égale à 0,95.