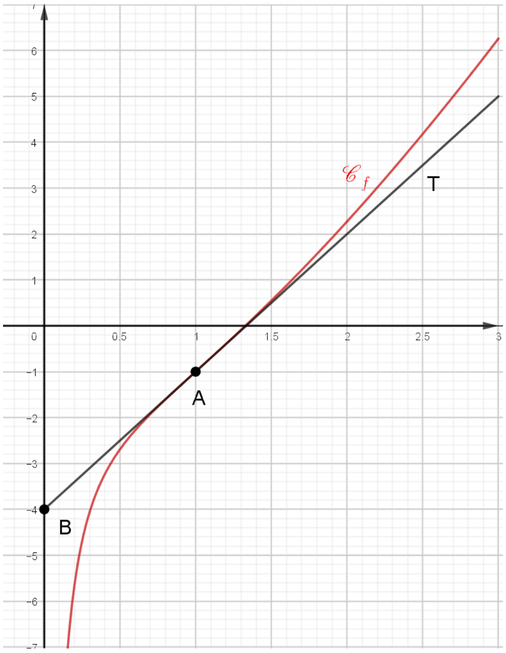
Exercice 3 — 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x^2)-\frac{1}{x}$.

Partie A : lectures graphiques

On a tracé la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(1;-1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0;-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ puis sa limite en 0.

2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0+\infty[$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

2.b. Montrer que , pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f''(x)=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

3.a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3.b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

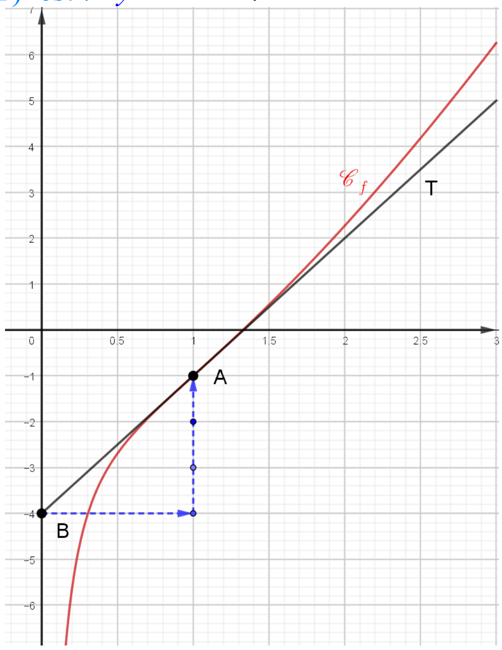
4.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4.b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie $\alpha^2=\exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.

CORRECTION

Partie A : lectures graphiques

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la droite (T)=(AB).
Pour aller de B vers A il faut se déplacer d'une unité vers la droite et de trois vers le haut donc le coefficient directeur de (T) est : $\frac{3}{1}=3$ d'autre part $B(0;-4)$ donc l'ordonnée à l'origine de (T) est : -4. L'équation réduite de (T) est : $y=3x-4$.



2. Sur $]0;1[$ la fonction f est concave et sur $]1;+\infty[$ la fonction f est convexe.
Le point A semble être le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.

Partie B : études analytiques

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;\infty[$

$f(x)=x\ln(x^2)-\frac{1}{x}$ soit $f(x)=2x\ln(x)-\frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}2x\ln(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$.

Pour la somme : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0}x\ln(x)=0$ et $\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$.

Donc $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$.

2.a. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=2\left(x\times\frac{1}{x}+1\times\ln(x)\right)+\frac{1}{x^2}=2+2\ln(x)+\frac{1}{x^2}$.

2.b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$

$f''(x)=2\times\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$ $\quad f''(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x^3}$

3.a. Pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $\frac{2(x+1)}{x^3}>0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de (x-1).

Si $0<x<1$ alors $f''(x)<0$ et f est concave sur $]0;1[$.

Si $1<x$ alors $f''(x)>0$ et f est convexe sur $]0;+\infty[$.

Et $f''(1)=0$ donc le point $A(1;-1)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}_f$).

3.b.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

$f'(1)=3$ f' admet un minimum strictement positif donc f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

4.a. f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une valeur α unique telle que $f(\alpha)=0$.

4.b. α est l'abscisse du point d'intersection de ($\mathscr{C}_f$) et l'axe des abscisses, par lecture graphique, on a $1{,}3\leqslant\alpha\leqslant1{,}4$ puis par balayage on obtient $1{,}32\leqslant\alpha\leqslant1{,}33$ car :

$f(1{,}32)=2{,}64\ln(1{,}32)-\frac{1}{1{,}32}\simeq-0{,}025$ et $f(1{,}33)=2{,}66\ln(1{,}33)-\frac{1}{1{,}33}\simeq0{,}007$

1,33 est la valeur arrondie au centième de α .

$f(\alpha)=\alpha\ln(\alpha^2)-\frac{1}{\alpha}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\ln(\alpha^2)=\frac{1}{\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad \ln(\alpha^2)=\frac{1}{\alpha^2}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2=\exp(\alpha^2)$