Exercice 4 — 6 points

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\,dx .$$

1. Calculer I_0.

2.a. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
2.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leqslant 0$.
2.c. Déduire des deux questions précédentes, que la suite (I_n) converge.

3.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{I}_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$.

3.b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \dfrac{1-e^{n\pi}}{n}$.

3.c. Déduire des deux opérations précédentes la limite de la suite (I_n).

4.a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

$$\mathrm{I}_n = 1 + e^{-n\pi} - n\,\mathrm{J}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\mathrm{J}_n .$$

4.b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\mathrm{I}_n = \dfrac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$.

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import*
2 def seuil():
3   n=0
4   I=2
5   ....
6     n=n+1
7     I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n
```


CORRECTION

1. $I_0=\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$

Une primitive de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ est -cos :
donc $I_0=[-\cos(x)]_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=-(-1)+1=2$ $\quad I_0=2$

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;\pi]$, on a : $\sin(x)\geqslant 0$ et pour tout entier naturel n, on a : $e^{-nx}\geqslant 0$ donc $e^{-nx}\geqslant 0$ et $I_n\geqslant 0$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx-\int_0^{\pi}e^{-nx}\sin(x)\,dx=\int_0^{\pi}(e^{-(n+1)x}\sin(x)-e^{-nx}\sin(x))\,dx$$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}e^{-nx}\sin(x)(e^{-x}-1)\,dx$$

$$0\leqslant x\leqslant\pi \iff 0\geqslant -x\geqslant -\pi \iff e^0\geqslant e^{-x}\geqslant e^{-\pi} \iff 1\geqslant e^{-x}\geqslant e^{-\pi}$$

si x appartient à l'intervalle $[0;\pi]$ alors $e^{-x}-1\leqslant 0$ et $e^{-nx}\sin(x)(e^{-x}-1)\leqslant 0$ donc $I_{n+1}-I_n\leqslant 0$.

2.c. Pour tout entier naturel n, d'une part $I_{n+1}-I_n\leqslant 0$ donc la suite (I_n) est décroissante, d'autre part $I_n\geqslant 0$ donc la suite (I_n) est minorée par 0.
Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (I_n) est convergente.

3.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;\pi]$, on a : $0\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ et pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant e^{-nx}$ donc $\int_0^{\pi}e^{-nx}\sin(x)\,dx\leqslant\int_0^{\pi}e^{-nx}\,dx$ soit $I_n\leqslant\int_0^{\pi}e^{-nx}\,dx$.

3.b. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on choisit, pour primitive de la fonction qui à x associe e^{-nx} , la fonction qui à x associe $\frac{e^{-nx}}{-n}=-\frac{e^{-nx}}{n}$.

$$\int_0^{\pi}e^{nx}\,dx=\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{\pi}=-\frac{e^{-n\pi}}{n}+\frac{e^0}{n}=\frac{1-e^{-n\pi}}{n}$$

3.c. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n\pi)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-n\pi}}{n}\right)=0$.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a :

$0\leqslant I_n\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1-e^{-n\pi}}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-n\pi}}{n}\right)=0$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

4.a. <u>Première méthode</u>

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;\pi]$: $I_n=\int_0^{\pi}e^{-n\pi}\sin(x)\,dx$

$u(x)=e^{-nx}$ $\qquad v'(x)=\sin(x)$
$u'(x)=-n\,e^{-nx}$ $\qquad v(x)=-\cos(x)$

En utilisant la formule d'intégration par parties

$$I_n=\int_0^{\pi}e^{-nx}\sin(x)\,dx=[e^{-nx}(-\cos(x))]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}n\,e^{-nx}\cos(x)\,dx$$

$I_n=e^{-n\pi}+1-n\,J_n$.

<u>Deuxième méthode</u>

Si on choisit :

$u(x)=\sin(x)$ $\qquad v'(x)=e^{-nx}$

$u'(x)=\cos(x)$ $\qquad v(x)=-\frac{e^{-nx}}{n}$

$$I_n = \left[\sin(x)\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)\cos(x)\,dx$$

$$I_n = 0 + \frac{1}{n} J_n$$

4.b. $I_n = \frac{1}{n} J_n \quad \Leftrightarrow \quad n I_n = J_n$

et $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n(n I_n) \quad \Leftrightarrow \quad (n^2+1) I_n = 1 + e^{-n\pi} \quad \Leftrightarrow \quad I_n = \dfrac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$

5. Il suffit d'ajouter en 5 l'instruction :
tant que $I \geqslant 0{,}1$:
c'est à dire while I >=0,1 :

```
1  from math import*
2  def seuil():
3    n=0
4    I=2
5    While I>=0.1:
6      n=n+1
7      I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```