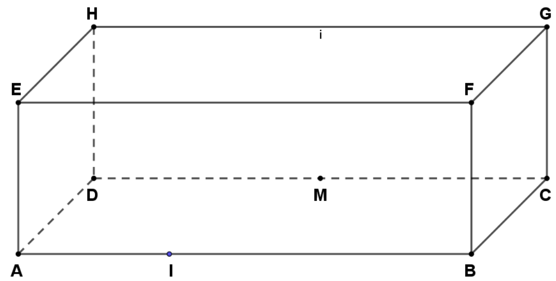
Exercice 2 — 5 points

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB=3$ et $AD=AE=1$, représenté ci-dessous



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.
On se place dans le repère orthonormé : $(A;\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

2.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est : $2x+6y+3z-9=0$.

2.c. Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est : $5x+15y-3z+7=0$ est-il parallèle au plan (HMF).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3;\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

1. $F(3;0;1)$ $H(0;1;1)$ $M(1{,}5;1;0)$

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (HMF) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (HMF) par exemples $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HF}$.

$\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{HM}=2\times1{,}5+6\times0+3\times(-1)=3-3=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{HF}=2\times3+6\times(-1)+3\times0=6-6=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

2.b. (HMF) est le plan passant par $H(0;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

M appartient au plan (HMF) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{HM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+6\times(y-1)+3\times(z-1)=0$

$\Leftrightarrow$ $2x+6y+3z-9=0$

2.c. $\vec{n_1}\begin{pmatrix}5\\15\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\vec{n_1}=\lambda.\vec{n}$ donc les vecteurs n_1 et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires et les plans p et (HMF) ne sont pas parallèles.

3. $D(0:1;0)$ $G(3;1;1)$

(DG) est la droite passant par $D(0;1;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

M(x;y;z) appartient à la droite (DG) si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{DM}=t.\overrightarrow{DG}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y-1=0\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

4. On doit résoudre le système : $\begin{cases}2x+6y+3z-9=0\\x=3t\\y=1\\z=t\end{cases}$

On obtient : $2\times3t+6\times1+3\times t-9=0$ $\Leftrightarrow$ $9t-3=0$ $\Leftrightarrow$ $t=\frac{1}{3}$

$x=3\times\frac{1}{3}=1$ $y=1$ $z=\frac{1}{3}$ $N\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$.

5. $G(3;1;1)$ $R\left(3;\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ $R(1;0{,}25;0{,}5)$

$\overrightarrow{GR}\begin{pmatrix}0\\-0{,}75\\-0{,}5\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GR}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{GR}$ n'est pas orthogonal au plan (HMF) et le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).