

Exercice 3

6 points

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n .

2. Calculer u_1 et u_2
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et trouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang à partir duquel la suite dépasse $0,95$.

```
def seuil():  
    n=0  
    u=0.5  
    while u< 0.95:  
        n=...  
        u=...  
    return n
```

CORRECTION

$$1. \quad g(x) = 2x - x^2 \quad g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

pour tout nombre réel x appartenant à $[0; 1[$, $g'(x) > 0$ et $g'(1) = 0$

donc g est strictement croissante sur $[0; 1]$.

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = 2 \times 1 - 1^2 = 1.$$

$$2. \quad u_1 = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$u_2 = g\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{6}{4} - \frac{9}{16} = \frac{24-9}{16} = \frac{15}{16}.$$

3. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$

Initialisation

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{3}{4} \quad \text{donc} \quad 0 < u_0 < u_1 < 1 \quad \text{et la propriété est vérifiée pour } n=0.$$

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ et on doit démontrer que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.

Or si $0 < u_n < u_{n+1} < 1$, sachant que g est strictement croissante sur $[0; 1]$, alors on a :

$$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1) \quad \text{soit} \quad 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n < u_{n+1} < 1$, alors la suite (u_n) strictement croissante et majorée par 1 donc la suite (u_n) est convergente.

5. On note ℓ la limite de la suite (u_n) . On a pour tout entier naturel n , $g(u_n) = u_{n+1}$ donc $g(\ell) = \ell$ et ℓ est une solution de l'équation $g(x) = x \Leftrightarrow 2x - x^2 = x \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0$
 $\Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=1)$

$$(u_n) \text{ est une suite strictement croissante donc } u_0 = \frac{1}{2} < \ell \text{ et } \ell = 1$$

6. Pour tout naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

$$\text{or } g(x) = 1 \Leftrightarrow 1 = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

donc pour tout entier naturel n , $u_n \neq 1$ et pour tout entier naturel n , $1 - u_n > 0$.

La suite (v_n) telle que $v_n = \ln(1 - u_n)$ est définie pour tout entier naturel n .

Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln(1 - 2u_n + u_n^2) = \ln((1 - u_n)^2) = 2 \ln(1 - u_n) \quad \text{car } 1 - u_n > 0$$

$$v_{n+1} = 2 v_n$$

$$(v_n) \text{ est la suite géométrique de raison } 2 \text{ et de premier terme } v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

7. Pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times q^n = -\ln(2) \times 2^n.$$

$$8. \quad v_n = \ln(1 - u_n) \Leftrightarrow e^{v_n} = 1 - u_n \Leftrightarrow u_n = 1 - e^{v_n} = 1 - e^{-\ln(2)2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

On peut vérifier pour $n=0$ et $n=1$ et $n=2$

$$u_n = 1 - e^{-\ln(2)2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ et } -\ln(2) < 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 \ln(2) 2^n) = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-\ln(2)2^n}) = 0$$

conséquence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

9. Il suffit de compléter les instructions aux lignes 5 et 6

ligne 5 $n = n + 1$

ligne 6 $u = 2*u - u*u$

```
def seuil():  
    n=0  
    u=0.5  
    while u < 0.95:  
        n= n+1  
        u= 2*u-u*u  
    return n
```

Remarque : ligne 6 on peut aussi écrire $u = 1 - (1/2)**(2**n)$