

Exercice 1

4 points

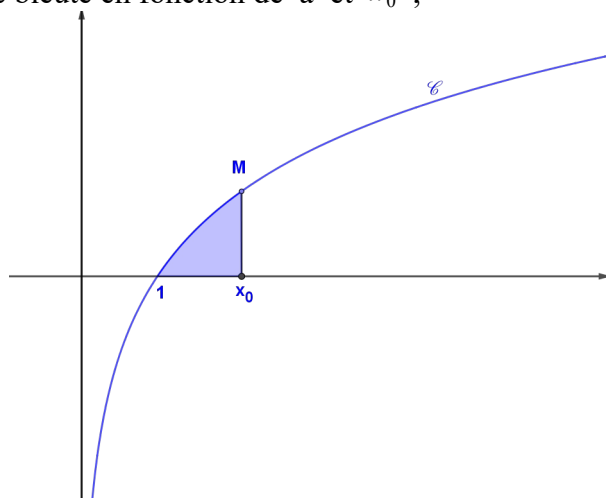
Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = a \ln(x)$.

On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

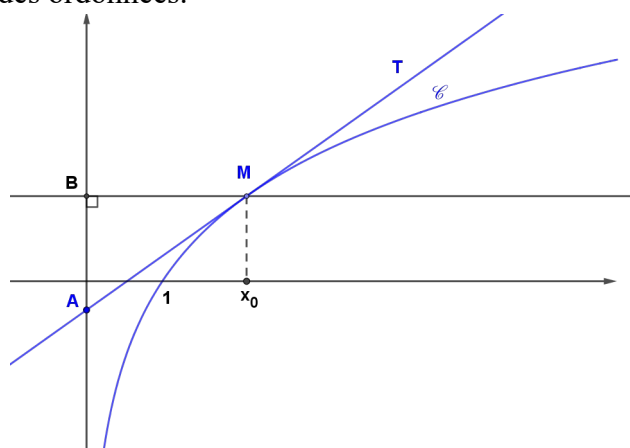
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a(x \ln(x) - x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et x_0 ;



On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est à dire un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

CORRECTION

$$1. f(x)=0 \Leftrightarrow a \ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

(car a est différent de 0)

L'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est:1.

$$2. F(x)=a(x \ln(x)-x)$$

$$F \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[\quad (\ln(x))'=\frac{1}{x}.$$

$$F'(x)=a\left(1 \times \ln(x)+x \times \frac{1}{x}-1\right)=a(\ln(x)+1-1)=a \ln(x)=f(x)$$

donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

3. L'aire, en unité d'aire, du domaine bleuté est :

$$\int_0^{x_0} f(x) dx = [F(x)]_0^{x_0} = F(x_0) - F(0) = a(x_0 \ln(x_0) - x_0) - 0$$

$$\int_0^{x_0} f(x) dx = a(x_0 \ln(x_0) - x_0)$$

4. $M(x_0; a \ln(x_0))$ B est le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées donc $B(0; a \ln(x_0))$.

$$f(x)=a \ln(x) \quad f \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[\quad f'(x)=\frac{a}{x}.$$

Le coefficient directeur de T est : $\frac{a}{x_0}$.

$$T: y=\frac{a}{x_0}x+b$$

$$T \text{ passe par } M \text{ donc } a \ln(x_0)=\frac{a}{x_0} \times x_0 + b \Leftrightarrow b=a \ln(x_0)-a$$

$$T: y=\frac{a}{x_0}x+a \ln(x_0)-a.$$

A est le point d'intersection entre T et l'axe des ordonnées donc $A(0; a \ln(x_0)-a)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ donc } AB=|a|=a \text{ (car } a>0 \text{)}.$$

La longueur AB est égale à la constante a .