Exercice 1 — 5 points

Partie A

On considère l'équation différentielle (E): $y'+\frac{1}{4}y=20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, d'inconnue y, fonction dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par $g(x)=axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E'): $y'+\frac{1}{4}y=0$ d'inconnue y fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0)=8$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
De plus on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

1.a. Justifier que pour tout réel x positif, $f'(x)=(18-5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1.b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x)=8$;

2.a. Justifier que l'équation $f(x)=8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14;15]$.

2.b. Recopier et compléter le tableau ci-après en faisant tourner étape par étape la fonction fonction_equation ci-dessous écrite en langage Python.

```
from math import exp
def f(x):
  return (20*x+8)*exp(-1/4*x)
def solution_equation():
 a,b=14,15
  while b-a>0.1:
    m=(b-a)/2
    if f(x)>8:
      a=m
    else:
      b=m
  return a,b
```

a	14				
b	15				
b-a	1				
m	14.5				
Condition f(m)>8	FAUX				

2.c. Quel est l'objectif de la fonction fonction_equation dans le contexte de la question ?

CORRECTION

Partie A

1. (e): $y'+\frac{1}{4}y=20e^{-\frac{1}{4}x}$

Pour tout nombre réel x positif ou nul $g(x)=axe^{-\frac{1}{4}x}$

g est dérivable sur $[0;+\infty[$, $g'(x)=ae^{-\frac{1}{4}x}-\frac{1}{4}axe^{-\frac{1}{4}x}$.

g est une solution particulière de (E) si et seulement si pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$:

$g'(x)+\frac{1}{4}g(x)=20e^{-\frac{1}{4}x} \Leftrightarrow ae^{-\frac{1}{4}x}-\frac{1}{4}axe^{-\frac{1}{4}x}+\frac{1}{4}axe^{-\frac{1}{4}x}=20e^{-\frac{1}{4}x} \Leftrightarrow ae^{-\frac{1}{4}x}=20e^{-\frac{1}{4}x}$

$e^{-\frac{1}{4}x}\neq 0$ donc $a=20$.

2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle du type $y'+\alpha y=0$ $(\alpha$ nombre réel fixé$)$ sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x)=ke^{-\alpha x}$ $(k$ constante réelle$)$.

L'ensemble des fonctions solutions de l'équation (E') est l'ensemble des fonctions h_k définies sur $[0;+\infty[$ par $h_k(x)=ke^{-\frac{1}{4}x}$ (k constante réelle).

3. (E) est une équation différentielle avec second membre dont g est une solution particulière.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions f_k définies sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x)=h_k(x)+g(x)=ke^{-\frac{1}{4}x}+20xe^{-\frac{1}{4}x}=(k+20x)e^{-\frac{1}{4}x}$ (k constante réelle).

4. $f_k(0)=8=ke^0=k$

donc $f(x)=(8+20x)e^{-\frac{1}{4}x}$

Partie B

1.a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$f'(x)=20e^{-\frac{1}{4}x}-\frac{1}{4}(20x+8)e^{-\frac{1}{4}x}=(20-5x-2)e^{-\frac{1}{4}x}=(18-5x)e^{-\frac{1}{4}x}$

1.b. Pour tout nombre réel x, on a : $e^{-\frac{1}{4}x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (18-5x) sur $[0;+\infty[$.

$18-5x=0 \Leftrightarrow 18=5x \Leftrightarrow x=\frac{18}{5}=3{,}6$

$18-5x<0 \Leftrightarrow 18<5x \Leftrightarrow \frac{18}{5}<x$

$18-5x>0 \Leftrightarrow 0\leqslant x<\frac{18}{5}$

Tableau de variation de f

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	8	↗	M	↘	0

$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Maximum de f : $M=f\left(\frac{18}{5}\right)=\left(20\times\frac{18}{5}+8\right)e^{-\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}}=80e^{-0,9}\simeq 32,5$

2.a. f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{18}{5};+\infty\right[$ à valeurs dans $]0;M]$.

8 appartient à $]0;M]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=8$ admet une unique solution α appartenant à $\left[\frac{18}{5};+\infty\right[$.

$f(14)=288\times e^{-3,5}\simeq 8,7 \qquad f(15)=308\times e^{-3,75}\simeq 7,2$

donc $f(15)<f(\alpha)<f(14)$ et $15>\alpha>14$ (f est décroissante sur $\left[\frac{18}{5};+\infty\right[$).

2.b. On complète le tableau en utilisant la calculatrice.

a	14	14	14.25	14.375	14.4375
b	15	14.5	14.5	14.5	14.5
b-a	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
m	14.5	14.25	14.375	14.4375	
Condition f(m)>8	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

2.c. L'objectif de la fonction fonction_equation est de donner un encadrement de α à 10^{-1} près en utilisant la méthode de dichotomie.