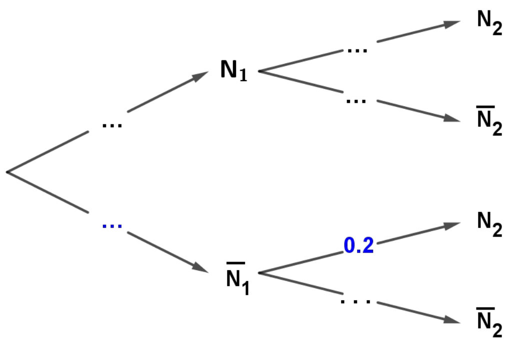
Exercice 2 *6 points*

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 puis on pioche au hasard une boule de U_2.
On note :
. N_1 l'évènement : « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
. N_2 l'évènement : « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».
Pour tout événement A on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

Partie A

1. On considère l'arbre pondéré ci-dessous :



1.a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant que l'on a pioché une boule blanche dans U_1 est 0,2.
1.b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessus, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés sous forme décimale.

2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2. Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1. On donnera le résultat sous forme arrondie à 10^{-2}.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante. C'est à dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2
On rappelle que la probabilité de une boule noire dans U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.

2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1-0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexe de l'expérience.

Partie C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .
On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'une U_2 , puis on pioche au hard une boule dans l'urne U_2 .

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?

2. Combien y-a-t-il de tirages possibles de deux simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?

3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de piocher une boule noire dans U_2 avec l'expérience de la partie A ?
Justifier votre réponse.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

CORRECTION

Partie A

1.a. Si on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 et on la place dans l'urne U_2, alors dans l'urne U_2 il y a 5 boules:1 noire et 4 blanches.

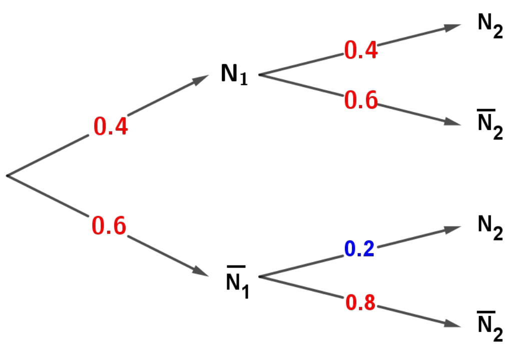
La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est $\frac{1}{5}=0{,}2$ donc $P_{\bar{N}_1}(N_2)=0{,}2$.

1.b. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules : 4 noires et 6 blanches donc $P(N_1)=\frac{2}{10}=0{,}4$ et $P(\bar{N}_1)=\frac{6}{10}=0{,}6$.

Si on pioche une boule noire dans l'urne U_1 et on la place dans U_2 alors dans U_2 il y a 5 boules 2 noires et 3 blanches donc $P_{N_1}(N_2)=\frac{2}{5}=0{,}4$ et $P_{N_1}(\bar{N}_2)=\frac{3}{5}=0{,}6$.

On a vu que $P_{\bar{N}_1}(N_2)=0{,}2$ donc $P_{\bar{N}_1}(\bar{N}_2)=1-0{,}2=0{,}8$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(N_1\cap N_2)=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)=0{,}4\times 0{,}4=0{,}16$

3. On utilise la formule des probabilité totales.

$P(U_2)=P(N_1\cap N_2)+P(\bar{N}_1\cap N_2)=0{,}16+P(\bar{N}_1)\times P_{\bar{N}_1}(N_2)=0{,}16+0{,}6\times 0{,}2$

$P(U_2)=0{,}16+0{,}12=0{,}28$

4. On nous demande de calculer $P_{N_2}(\bar{N}_1)$.

$P_{N_2}(\bar{N}_1)=\frac{P(N_2\cap\bar{N}_1)}{P(N_2)}=\frac{0{,}12}{0{,}28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}\simeq 0{,}43$ à 10^{-2} près.

Partie B

1. On considère l'épreuve Bernoulli suivante :

On effectue une expérience de la partie A.

Succès S : « Piocher une boule noire dans U_2 » $P(S)=P(N_2)=0{,}28$

Échec $\bar{S}$: « Piocher une boule blanche dans U_2 » $P(\bar{S})=P(\bar{N}_2)=0{,}72$.

On effectue n épreuves de Bernoulli indépendantes et X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en n épreuves, la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}28$.

2. $1-0{,}72^n\geqslant 0{,}9 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}1\geqslant 0{,}72^n$

$\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}1)\geqslant\ln(0{,}72^n) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(0{,}1)\geqslant n\times\ln(0{,}72)$

$0<0{,}72<1$ donc $\ln(0{,}72)<0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)}\leqslant n$

or $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)}\simeq 7{,}009$ et n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad 8 \leqslant n$.

Le plus petit entier naturel n tel que $1-0,72^n \geqslant 0,9$ est 8.

3. $1-0,72^n$ est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire en n épreuves.

Il faut donc effectuer 8 épreuves pour avoir une probabilité, d'obtenir au moins une boule noire, supérieure ou égale à0,9.

Partie C

1. Dans U_1 , il y a 10 boules, il y a donc $\binom{10}{2}$ possibilités de piocher simultanément 2 boules de l'urne U_1

$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$

2. Dans l'urne U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches, il y a donc $4\times 6=24$ possibilités de piocher simultanément une boule et une boule blanche.

De même, il y a $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$ possibilités de piocher simultanément deux boules noires dans l'urne U_1 .

Il y a aussi $\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$ possibilités de piocher simultanément deux boules blanches dans l'urne U_1 .

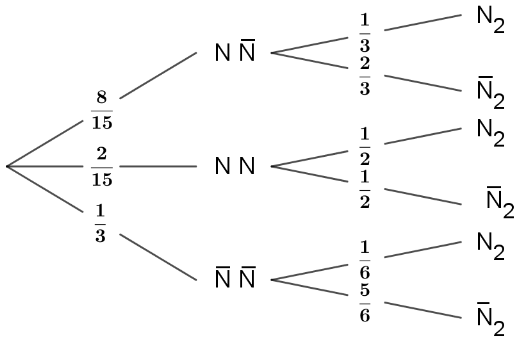
(on peut vérifier que : $24+6+15=45$).

3. On note : $N\bar{N}$ l'évènement : « On pioche 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 ».

NN l'évènement : « On pioche 2 boules noires dans U_1 ».

$\bar{N}\bar{N}$ l'évènement : « On pioche 2 boules blanches dans U_1 ».

On obtient l'arbre pondéré suivant :



En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(N_2)=\frac{8}{15}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{90}+\frac{6}{90}+\frac{5}{90}=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}=0,3$

$0,3>0,28$ donc la probabilité de piocher une noire dans U_2 est supérieure dans l'expérience de la partie C que dans l'expérience de la partie A.