Exercice 3 — 4 points

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel non nul n : $u_n=\dfrac{25+(-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} w_0=1 \\ w_{n+1}=\dfrac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n>0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n=\dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\ln(1+v_n) \end{cases}$

On admet que pour entier naturel n, $v_n>0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définit pour tout entier naturel n par : $I_n=\displaystyle\int_0^e (\ln(x))^n \, dx$.

Affirmation4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.

CORRECTION

1. **Affirmation 1 :** **FAUSSE**

Preuve

Pour tout entier naturel non nul n :

$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $24 \leqslant 25+(-1)^n \leqslant 26$ et $\frac{24}{n} \leqslant \frac{25+(-1)^n}{n} \leqslant \frac{26}{n}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{24}{n}=0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{26}{n}=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=0$.

La suite (u_n) est donc convergente.

2. **Affirmation 2 :** **VRAIE**

Preuve

Pour tout entier naturel n : $t_{n+1}=\frac{k}{w_{n+1}}$ or $w_{n+1}=\frac{w_n}{1+w_n}$ donc $\frac{1}{w_{n+1}}=\frac{1+w_n}{w_n}=\frac{1}{w_n}+1$

On obtient : $t_{n+1}=\frac{k}{w_{n+1}}=k\times\left(\frac{1}{w_n}+1\right)=\frac{k}{w_n}+k=t_n+k$.

donc (t_n) est la suite arithmétique de raison $k>0$ et de premier terme $t_0=\frac{k}{w_0}=\frac{k}{1}=k$.

$k>0$ donc la suite (t_n) est strictement croissante.

3. **Affirmation 3 :** **VRAIE**

Preuve

On peut facilement effectuer une démonstration en utilisant un raisonnement par récurrence mais nous proposons une méthode faisant intervenir la concavité de la fonction ln.

La fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$ c'est à dire sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de la tangente (T) au point de coordonnées (1;0).

Le coefficient directeur de (T) est $\frac{1}{1}=1$ donc (T): $y=x-1$.

Pour tout nombre réel $x>0$ on a : $x-1 \geqslant \ln(x)$.

Pour tout entier naturel n, en posant $x=1+v_n>1$ on a $v_n \geqslant \ln(1+v_n)$ donc $v_n \geqslant v_{n+1}$.

La suite (v_n) est décroissante.

4. **Affirmation 4 :** **VRAIE**

Preuve

Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1}=\int_1^e (\ln(x))^{n+1}\,dx$$

On effectue une intégration par parties

$1 \leqslant x \leqslant e$ $\quad u(x)=(\ln(x))^{n+1}$ $\quad u'(x)=(n+1)\times(\ln(x))^n\times\frac{1}{x}$

$v'(x)=1$ $\quad v(x)=x$

$$I_{n+1}=[x(\ln(x))^{n+1}]_1^e-(n+1)\int_1^e (\ln(x))^n\,dx$$

$I_{n+1}=e-0-(n+1)I_n$

$I_{n+1}=e-(n+1)I_{n+1}$