Exercice 4 — 5 points

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.
Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$, où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Soit (d_1) la droite passant par $A(1;2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=0\\ y=1+t\\ z=2+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de (d_1).

2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et diri gé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

4.a. Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
4.b. On note F le point d'intersection de la du plan $\mathcal{P}$.
Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0;-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-1\right)$.

5.a. Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).
5.b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

CORRECTION

1. $M(x;y;z)$ appartient à la droite (d_1) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}_1$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que :

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\lambda \\ y-2=2\lambda \\ z+1=0\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

2. (d_2) est la droite passant par $B(0;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de nombre réel a tel que $\vec{u}_1=a\vec{u}_2$ donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Pour démontrer que les deux droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes, il suffit de démontrer que le système $\begin{cases} 0=1+\lambda & (1) \\ 1+t=2+2\lambda & (2) \\ 2+t=-1 & (3) \end{cases}$ n'admet pas de solution.

(1) donne $\lambda=-1$ (3) donne $t=-3$ et on a $1+t=1-3=-2\neq 2-2=2+2\lambda=0$

Les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes et ne sont pas parallèles donc elles sont non coplanaires.

3. Le plan d'équation cartésienne $-2x+y+5z+5=0$ à pour vecteur normal $\vec{N}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$.

$\vec{N}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{N}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{w}$.

$\vec{u}_1.\vec{N}=1\times(-2)+2\times1+0\times5=-2+2=0$

$\vec{w}.\vec{N}=2\times(-2)+(-1)\times1+1\times5=-4-1+5=0$

$A(1;2;-1)$ $\quad -2\times1+2+5\times(-1)+5=-2+2-5+5=0$ donc le point A appartient au plan d'équation $-2x+y+5z+5=0$

Conclusion :

$-2x+y+5z+5=0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

4.a. (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le vecteur $\vec{u}_2$ n'est pas orthogonal à $\vec{N}$.

$\vec{u}_1.\vec{N}=0\times(-2)+1\times1+1\times5=1+5=6\neq0$ donc (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$.

4.b. Il suffit de vérifier que le point de coordonnées $\left(0;-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ appartient à la droite (d_2) et au plan $\mathscr{P}$

$$\begin{cases} 0=0 \\ -\frac{5}{3}=1+t \\ -\frac{2}{3}=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1-\frac{5}{3} \\ t=-2-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ t=-\frac{8}{3}\right. .$$

$$-2\times0-\frac{5}{3}+5\times\frac{2}{3}+5=-\frac{15}{3}+5=0$$

donc le point $F\left(0;-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ est le point d'intersection de (d_2) et $\mathscr{P}$.

5.a. $E\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-1\right)$ $\quad F\left(0;-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\vec{w}$

$\overrightarrow{EF}$ est donc orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et E appartient à (d_1) et F appartient à (d_2) donc EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

5.b. $EF^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$ $\quad EF=\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}$