

Exercice 2

5 points

Cet exercice contient 5 affirmations.

Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX, en justifiant la réponse.

Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1 :** La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
2. **Affirmation 2 :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3 :** La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Affirmation 4 :** Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 0$.
3. **Affirmation 5 :** La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur : $2e^{\frac{3}{2}}$.

CORRECTION

Partie 1

$u_0 = 10$ pour tout entier naturel n $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

On utilise un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Initialisation

$$u_0 = 10, u_1 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{16}{3} \text{ on a } 0 \leq \frac{16}{3} \leq 10 \text{ donc } 0 \leq u_1 \leq u_0.$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ et on doit démontrer que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

$$\text{Si } 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \text{ alors } \frac{1}{3} \times 0 \leq \frac{1}{3}u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n \text{ et } 0+2 \leq \frac{1}{3}u_{n+1}+2 \leq \frac{1}{3}u_n+2 \text{ soit } 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \text{ donc } 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Conséquence

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

La suite (u_n) est convergente (suite décroissante et minorée).

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L \text{ donc } L = \frac{1}{3}L + 2 \Leftrightarrow 3L = L + 6 \Leftrightarrow 2L = 6 \Leftrightarrow L = 3. \text{ donc } L \neq 0.$$

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

$$\text{Pour tout entier naturel } n : v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n + 3 = u_n$$

$$\text{donc } v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(v_n + 3) - 1 = \frac{1}{3}v_n + 1 - 1 = \frac{1}{3}v_n$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Partie 2

1. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Soit la fonction g constante égale à k (nombre réel fixé).

Pour tout réel x $g(x) = k$, on a donc $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = \frac{3}{2}g(x) + 2 \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2} \times k + 2 \quad \frac{3}{2}k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}.$$

L'unique solution constante de l'équation différentielle (E) est la fonction constante égale à $-\frac{4}{3}$.

2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont les fonctions définies

$$f_K \text{ sur } \mathbb{R} \text{ par } f_K(x) = K e^{ax} - \frac{b}{a} \text{ (K constante réelle).}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_K(x) = K e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$.

Si on veut $f_K(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = K - \frac{4}{3} \Leftrightarrow K = \frac{4}{3}$.

L'unique solution f de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ est définie par :

$$f(x) = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}.$$

3. Affirmation 5 : VRAIE

Preuve

$$f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x} = 2 e^{\frac{3}{2}x}$$

$$f'(1) = 2 e^{\frac{3}{2}}$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $2 e^{\frac{3}{2}}$.