Exercice 3 — 5 points

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-4)e^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x)=(-x^2+2x+4)e^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

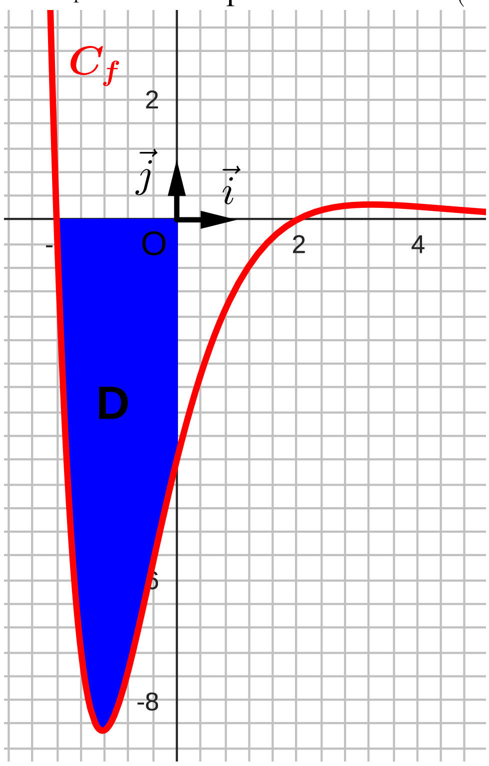
Partie 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n=\int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\,dx$.

1. Justifier que $I_0=e^2-1$.
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$.
3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur la partie 1.
2. On a représenté ci-dessous la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,;\vec{j})$.



Le domaine D du plan hachuré ci-dessus est délimité par la courbe C_f l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S de D.

CORRECTION

Partie 1

Pour tout nombre réel x, $f(x)=(x^2-4)e^{-x}$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4)=+\infty$ pour le produit $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$f(x)=x^2e^{-x}-4e^{-x}=\frac{x^2}{e^x}-\frac{4}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$.

Pour la différence : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. Pour tout réel x :

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $(x^2-4)'=2x$

$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2-4)(-e^{-x})=(2x-x^2+4)e^{-x}$

$f'(x)=(-x^2+2x+4)e^{-x}$

3. Pour tout réel x, $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $f'(x)$ est le signe de : $-x^2+2x+4$.

$\Delta=4-4\times(-1)\times4=20$ $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{5}}{-2}=1-\sqrt{5}$ $x_2=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-2}=1+\sqrt{5}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)	$+\infty$	↘		↗		↘	0

On donne les variations de f sous la forme d’un tableau mais les valeurs des extréma ne sont pas demandées.

Partie 2

1. $I_0=\int_{-2}^{0}e^x\,dx$

$u(x)=e^{-x}$ une primitive de u sur $\mathbb{R}$ est U définie par $U(x)=-e^{-x}$.

$I_0=[-e^{-x}]_{-2}^{0}=-e^0+e^2=e^2-1$

2. Pour tout entier naturel n :

$I_n=\int_{-2}^{0}x^n e^{-x}\,dx$

$u(x)=e^{-x}$ $u'(x)=-e^{-x}$

$v'(x)=x^n$ $v(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

En utilisant la formule d’intégration par parties:

$$I_n=[x^{n+1}\times n+1\,e^{-x}]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x}dx$$

$$I_n=0-\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}\times e^2+\frac{1}{n+1}\int_{-2}^{0}x^{n+1}e^{-x}dx$$

$(n+1)I_n=-(-2)^{n+1}e^2+I_{n+1}$ $\Leftrightarrow$ $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$

3. $I_1=(-2)^1e^2+I_0=-2e^2+e^2-1=-e^2-1$
$I_2=(-2)^2+2I_1=4e^2-2e^2-2=2e^2-2$

Partie 3

1. $f(x)=(x^2-4)e^{-x}$
Le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de (x^2-4).

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f(x)		—	0	+	0	—	

2. Le domaine D est la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses , la courbe C_f et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$
f est négative sur l'intervalle [-2;0].

$$S=-\int_{-2}^{0}f(x)dx=-\int_{-2}^{0}(x^2-4)e^{-x}dx=-\int_{-2}^{0}x^2e^{-x}dx+4\int_{-2}^{0}e^{-x}dx=-I_2+4I_0$$

$S=-2e^2+2+4e^2-4=2e^2-2$ U.A.

