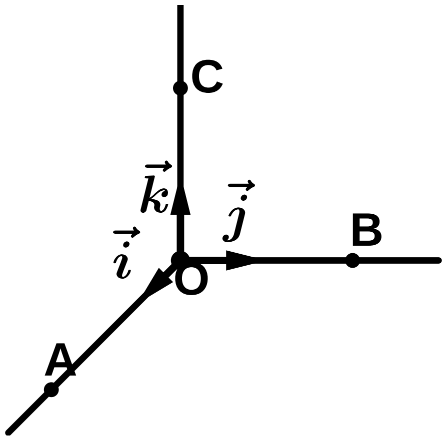
Exercice 4 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
On considère les 3 points : $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(0;0;2)$.



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante : « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC.

Partie1 : Distance du point au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).

5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété.

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.

2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à 22.

3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces ».

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}B\times h$ *où* B *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

CORRECTION

Partie 1

1. Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\times(-3)+3\times2+3\times0=-6+6=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2\times(-3)+3\times0+3\times2=-6+6=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

2. $M(x;y;z)$ $\quad\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$

M appartient au plan (ABC) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2\times(x-3)+3\times(y-0)+3\times(z-0)=0$
$\Leftrightarrow$ $2x+3y+3z-6=0$

3. d est la droite passant par $O(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite d est : $\begin{cases}x=2t+0\\y=3t+0\\z=3t+0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=2t\\y=3t\\z=3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

4. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d et du plan (ABC) on résout le système suivant :

$\begin{cases}2x+3y+3z-6=0\\x=2t\\y=3t\\z=3t\end{cases}$ on obtient $2\times(2t)+3\times(3t)+3\times(3t)-6=0$ $\Leftrightarrow$ $4t+9t+9t=6$

$\Leftrightarrow$ $22t=6$ $\Leftrightarrow$ $t=\frac{6}{22}=\frac{11}{3}$ $\quad x_H=2\times\frac{3}{11}=\frac{6}{11}$ $\quad y_H=3\times\frac{3}{11}=\frac{9}{11}$ $\quad z_H=3\times\frac{3}{11}=\frac{9}{11}$

$H\left(\frac{6}{11};\frac{9}{11};\frac{9}{11}\right)$.

Partie 2

1. OC est la hauteur du tétraèdre $OABC$ issue de C. $OC=2$ (en unité de longueur).

L'aire de la base OAB est : $A_{OAB}=\frac{1}{2}\times OB\times OA=\frac{1}{2}\times2\times2=2$ (en unité d'aire).

Le volume du tétraèdre $OABC$ est : $\frac{1}{3}\times A_{OAB}\times OC=\frac{1}{3}\times3\times2=2$ (en unité de volume).

2. Si on choisit pour base du tétraèdre ABC alors h est égale à la distance OH et le volume est : $V=\frac{1}{3}\times A_{ABC}\times OH$.

Donc $2=\frac{1}{3}\times A_{ABC}\times\frac{3\sqrt{22}}{11}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{2\times11}{\sqrt{22}}=A_{ABC}$ $\Leftrightarrow$ $A_{ABC}=\frac{22}{\sqrt{22}}=\sqrt{22}$ (en unité d'aire).

3. $A_{OAB}=3$ $\quad A_{OAC}=\frac{1}{2}\times OA\times OC=3$ $\quad A_{OBC}=\frac{1}{2}\times OB\times OC=2$

$A_{OAB}^2+A_{OAC}^2+A_{OBC}^2=3^2+3^2+2^2=9+9+4=22=A_{ABC}^2$.