

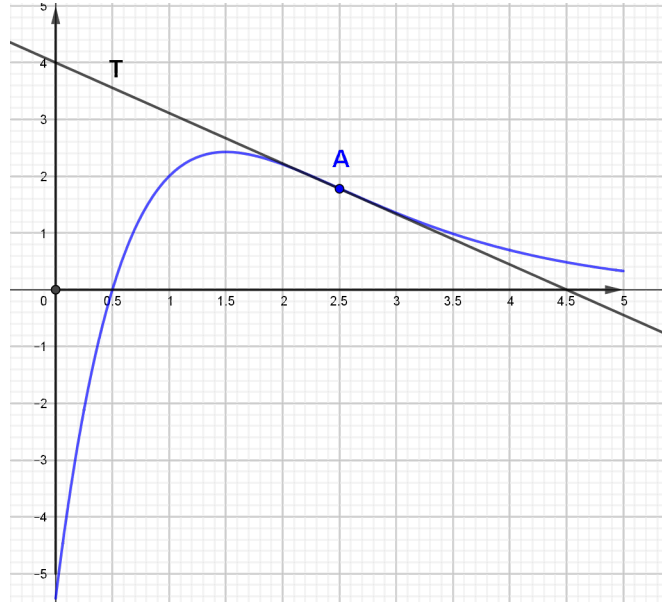
Exercice 1

5 points

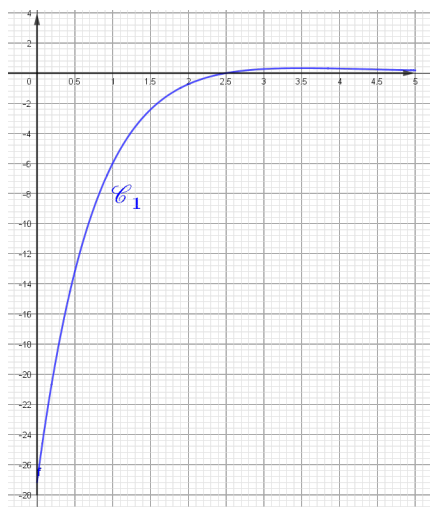
Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$, représenté par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.

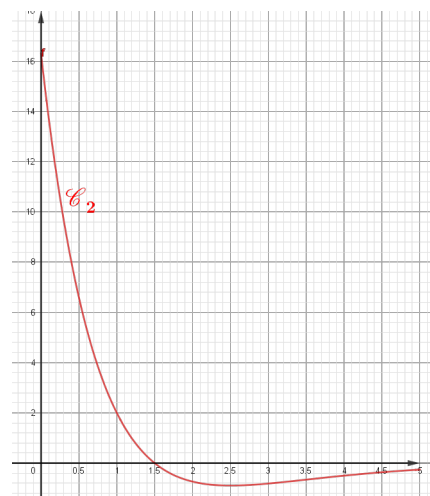
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



1. Donner par lecture graphique, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
2. Que semble représenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A .
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous. Associer à chacune de ces fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

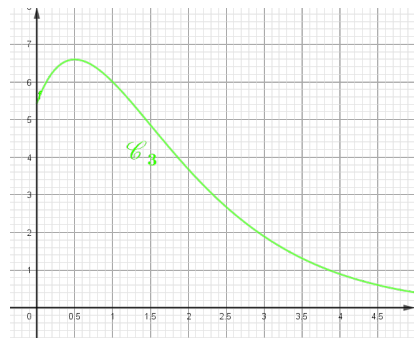


Courbe 1



Courbe 2

4. La courbe $\mathcal{C}_3$ ci-après peut-elle être la représentation graphique sur $[0; +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f , définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, est définie par : $f(x) = (4x - 2)e^{-x+1}$.

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de f .

1. Étude de f

1.a. Montrer que $f'(x) = (-4x + 6)e^{-x+1}$.

1.b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1.c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f .

2. On considère une fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

2.a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

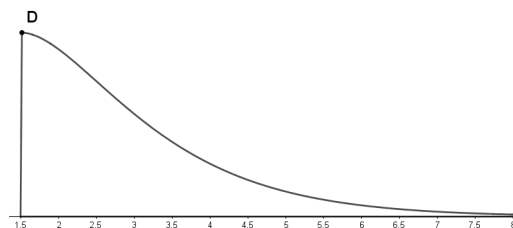
2.b. On admet que la fonction F , définie par $F(x) = (-4x - 2)e^{-x+1}$, est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale : $I = \int_{\frac{3}{2}}^8 f(x) dx$.

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.

Le profil de cette piste est donnée par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 8\right]$.

L'unité de longueur est le mètre.



3.a. Donner une valeur approchée au centimètre près de la hauteur du point de départ D.

3.b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste.

L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.

Sachant qu'une bombe de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8 \text{ m}^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

CORRECTION

Partie A

1.

x	0	1.5	5
variations de f	-5.4	2.4	0.2

2. A d'abscisse 2,5 semble être un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$.

3. f est croissante sur $[0;1,5]$ et décroissante sur $[1,5;5]$ donc f' est négative sur $[1,5;5]$.

C'est la courbe 2 qui est la courbe représentative de f' conséquence la courbe 1 est la courbe représentative de f'' .

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. Or f est négative sur $[0;0,5]$ et positive sur $[0,5;5]$ donc F est décroissante sur $[0;0,5]$ et croissante sur $[0,5;5]$.

La courbe $\mathcal{C}_3$ n'est pas la représentation graphique d'une primitive de f.

Partie B

1.a. $(e^{-x+1})' = -e^{-x+1}$

$$f(x) = (4x-2)e^{-x+1}$$

$$f'(x) = 4e^{-x+1} + (4x-2)(-e^{-x+1}) = (-4x+6)e^{-x+1}$$

1.b. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $e^{-x+1} > 0$ donc le signe $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$ et le signe de $(-4x+6)$.

$$-4x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$-4x+6 > 0 \Leftrightarrow 6 > 4x \Leftrightarrow 1,5 > x$$

$$-4x+6 < 0 \Leftrightarrow 6 < 4x \Leftrightarrow 1,5 < x$$

$$f(0) = -2e \approx -5,44 \quad f(1,5) = 4e^{-0,5} \approx 2,43$$

Tableau de variations de f

x	0	1.5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-2e	$4e^{-0,5}$	0

1.c. $f''(x) = (f')'(x) = -4e^{-x+1} + (-4x+6)(-e^{-x+1}) = (4x-10)e^{-x+1}$.

Le signe de $f''(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de $(4x-10)$.

$$4x-10=0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

x	0	2.5	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

f est concave sur $[0;2,5]$ et convexe sur $[2,5;+\infty[$.

A(2,5; f(2,5)) est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2.a. $F(x) = (ax+b)e^{-x+1}$

$$F'(x) = ae^{-x+1} + (ax+b)(-e^{-x+1}) = (-ax+a-b)e^{-x+1}$$

F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$ si et seulement si pour tout x de $[0; +\infty[$ $F'(x) = f(x)$.

Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow [(-ax+a-b) - (4x-2)]e^{-x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-a-4)x + a - b + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a-4=0 \\ a-b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \end{cases}$$

donc $F(x) = (-4x-2)e^{-x+1}$

2.b. Si f est une primitive de f sur $[0; +\infty[$ alors

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^8 f(x) dx = F(8) - F\left(\frac{3}{2}\right) = -34e^{-7} + 8e^{-0,5} \simeq 4,82 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

3. Remarque : le repère pour la figure de la question 3 de la partie B est orthonormé pour la première figure de la partie le repère n'était pas orthonormé.

3.a. L'ordonnée de D est $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-0,5} \simeq 2,43$ donc la hauteur du point D est 2,43 m au centimètre près.

3.b. L'aire du mur de profil I en m^2 soit 4,82 m^2 au cm^2 près.

L'aire couverte par l'artiste est $4,82 \times 0,75 = 3,62$.

$$\frac{3,62}{0,8} = 4,525$$

Il faut 5 bombes aérosol pour réaliser l'oeuvre de l'artiste.