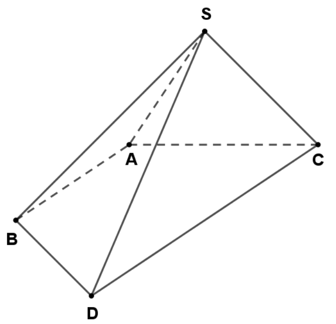
Exercice 2 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points :
$A(3;-1;1)$; $B(4;-1;0)$; $C(0;3;2)$; $D(4;3;-3)$ et $S(2;1;4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale et de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés.

2.a. Montrer que les points A ; B ; C et D sont coplanaires.
2.b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
On rappelle que un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles, appelés bases.

3.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2;1;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3.b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
3.c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
3.d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ puis montrer que $SI=2\,\text{cm}$.

4.a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées :
$H(3;3;-1)$ et montrer que $HB=3\sqrt{2}$ cm.
4.b. Calculer la valeur exacte se l'aire du trapèze ABDC.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\mathscr{A}=\left(\frac{b+B}{2}\right)\times h$ où b et B sont longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
On rappelle qu le volume V d'une pyramide est donnée par la formule :
$V=\frac{1}{3}\times\text{aire de la base}\times\text{hauteur}$.

CORRECTION

Remarque :

La figure donnée dans l'énoncé est une esquisse c'est à dire ne correspondant pas à une figure où les points sont placés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé de l'espace. (Ce qui correspond à une figure tracée à « main levée » au brouillon).

1. $A(3;-1;1)$; $B(4;1;0)$ et $C(0;3;2)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$ il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A ; B et C ne sont pas alignés.

2.a. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ Les points A ; B et C ne sont pas alignés donc détermine un plan (ABC).

A ; B ; C et D sont coplanaires si et seulement si D appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}1=a-3b\\4=0.a-4b\\-3=-a+b\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}b=1\\a=4\end{cases}$

donc les points A ; B ; C et D sont coplanaires.

2.b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$

donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles et le quadrilatère ABDC est un trapèze.

3.a. $\vec{n}(2;1;2)$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\times1+1\times0+2\times(-1)=2-2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2\times(-3)+1\times4+2\times1=-6+4+2=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3.b. $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

M appartient au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2\times(x-3)+1\times(x-1)+2\times(z-1)=0$

$\Leftrightarrow$ $2x+y+2z-7=0$

3.c. Δ est la droite passant par $S(2;1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(2;1;2)$.

Δ : $\begin{cases}x=2t+2\\y=t+1\\z=2t+4\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

3.d. Pour déterminer les coordonnées du point I on résout le système : $\begin{cases}2x+y+2z-7=0\\x=2t+2\\y=t+1\\z=2t+4\end{cases}$

on obtient : $2\times(2t+2)+1\times(t+1)+2\times(2t+4)-7=0$ $\Leftrightarrow$ $4t+4+t+1+4t+8-7=0$

$\Leftrightarrow$ $9t+6=0$ $\Leftrightarrow$ $t=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

$x=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2=\frac{2}{3}$ $y-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ $z=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)+4=\frac{8}{3}$ $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$

$SI^2=\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16+4+16}{9}=\frac{36}{9}=4$

$SI=\sqrt{4}=2$ cm

4.a. $C(0;3;2)$; $D(4;3;-2)$ et $H(3;3;-1)$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{CD}$ et le point H appartient à la droite (CD).

$B(4;-1;0)$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}=-1\times(4)+4\times0+(-1)\times(-4)=4+0-4=0$.

$\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ donc H est le projeté orthogonal de sur (CD).

$BH^2=(-1)^2+4^2+(-1)^2=1+16+1=18=9\times2$

$BH=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$ cm

BH=h est la hauteur du trapèze ABDC.

4.b. Pour le trapèze ABDC, AB est la petite base et CD est la grande base et BH est la hauteur.

$AB^2=1^2+0^2+(-1)^2=1+1=2$ $AB=\sqrt{2}$ cm

$CD^2=4^2+0^0+(-4)^2=16+16=16\times2$ $CD=\sqrt{16\times2}=4\times\sqrt{2}$ cm

$\mathcal{A}$ est l'aire du trapèze ABDC en cm^2

$\mathcal{A}=\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{2}=15\ cm^2$

5. Pour la pyramide SABDC, la base est le trapèze ABDC et la hauteur est SI

$\mathcal{V}=13\times15\times2=10\ cm^3$