Exercice 3 — 5 points

Dans la revue *Lancet Public Health,* les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de l'exercice.

Partie A

1. On prélève un individu de la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'événement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 ».
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les des autres.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà «été infectées.

2.a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2.b. Calculer son espérannce mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

2.c. Quelle est la probabilité, qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} du résultat.

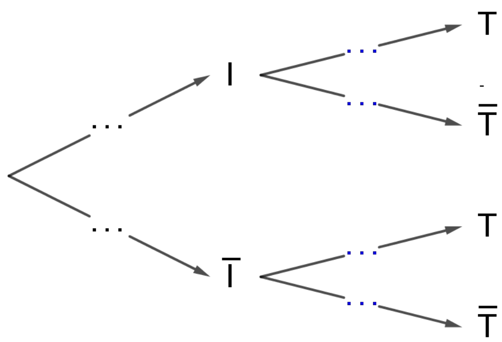
2.d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

2.e. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection) si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie (il s'agit d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie (il s'agit d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
. Sa sensibilité est de 0,8.
. Sa spécificité est de 0,99.
On prélève un individu soumis au test dans la population française au 11 mai 2020.
On note T l'événement : « le test réalisé est positif » ;

1. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous avec les données de l'exercice.



2. Montrer que $P(T) = 0{,}05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe, quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

CORRECTION

Partie A

1. 5.7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19 au 11 mai 2020 donc :
$P(I)=0{,}057$.

2.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On prélève au hasard une personne adulte de la population française ;
succès S : « la personne adulte prélevée a déjà été infectée par la COVID 19 »
$P(S)=P(I)=0{,}057$;
échec $\bar{S}$: « la personne adulte prélevée n'a pas été infectée par la COVID 19 ».
$P(\bar{S})=P(\bar{I})=1-0{,}057=0{,}943$.
On prélève 100 personnes au hasard, les tirages sont supposés avec remise et sont effectuées de façon indépendante.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 100 épreuves, donc la loi de X est la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}057$.

2.b. $E(X)=np=5{,}7$.
En moyenne, pour chaque tirage de 100 personnes adultes de la population française il y aura 5,7 infectée par la COVID 19.

2.c. Si k est un entier naturel tel que $0\leqslant k\leqslant 100$ alors $P(X=k)=\binom{100}{k}0{,}057^k\times 0{,}943^{100-k}$

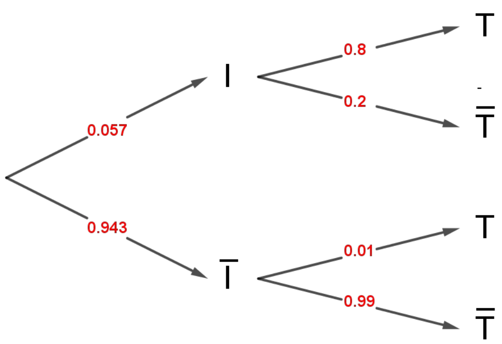
On a $P(X=0)=0{,}943^{100}\simeq 0{,}0028$.

2.d. En utilisant la calculatrice on obtient : $P(X\leqslant 2)\simeq 0{,}9801$.

2.e. Pour tout entier naturel n tel que $0\leqslant n\leqslant 99$ on a $P(X\leqslant n)\leqslant P(X\leqslant n+1)$.
En utilisant la calculatrice :
$P(X\leqslant 8)\simeq 0{,}8829$
$P(X=9)\simeq 0{,}9408$
Le plus petit naturel n tel que $P(X\leqslant n)\geqslant 0{,}9$ est : 9.

Partie B

1. La sensibilité du test est égale à $P_I(T)$, on a donc : $P_I(T)=0{,}8$ et $P_I(\bar{T})=1-0{,}8=0{,}2$.
La spécificité du test est égale à $P_{\bar{I}}(\bar{T})$, on a donc : $P_{\bar{I}}(\bar{T})=0{,}99$ et $p_{\bar{I}}(T)=1-0{,}99=0{,}01$.
D'autre part, $P(I)=0{,}057$ et $P(\bar{I})=1-0{,}057=0{,}943$.
On obtient l'arbre des probabilités

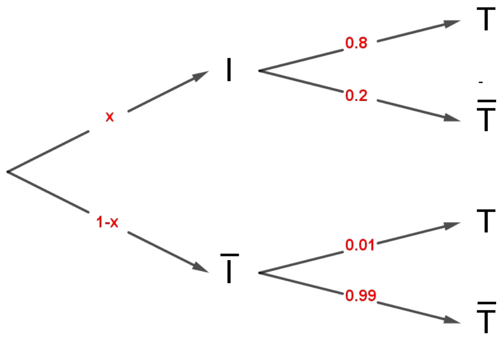


2. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(T)=P(I\cap T)+P(\bar{I}\cap T)=0{,}057\times 0{,}8+0{,}943\times 0{,}01$
$P(T)=0{,}0456+0{,}0943=0{,}05503$.

3. On nous demande de calculer $P_T(I)$.
$P_T(I)=\dfrac{P(I\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}0456}{0{,}0550}\simeq 0{,}8287$ à 10^{-4} près.

Partie C

On pose P(I)=x dans de population d'un autre pays, donc $P(\overline{I})=1-x$, la sensibilité et la spécificité du test n'ont pas changé.
On obtient pour arbre des probabilités :



En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(T)=P(I\cap T)+P(\overline{I}\cap T)=0{,}8\,x+0{,}01\times(1-x)=0{,}79\,x+0{,}01$.
Dans ce groupe, on a : P(T)=0,2944 donc
$0{,}2944=0{,}79\,x+0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}79\,x=0{,}2844 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{0{,}2844}{0{,}79}=0{,}36$.
36 % de la population de ce groupe a été infectée par la COVID19.
Et $P(I)=0{,}36$