

Exercice 4

5 points

Dans chacune des affirmations suivantes préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1 :** Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n , on a : $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

Affirmation 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.

```
1 def terme(N):  
2     U=1  
3     for i range(N):  
4         U=U+i  
5     return U
```

4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- Prix A : il reçoit 1000 euros par jour pendant 15 jours.
- Prix B : il reçoit 1 euro le 1^{er} jour, 2 euros le 2^{ème} jour, 4 euros le 3^{ème} jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$v_n = \int_1^n \ln(x) dx$$

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

CORRECTION

1. Affirmation 1: FAUSSE

Pour justifier, il suffit de donner un contre exemple.

Pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{1}{n+1} + 1$, on a : $a_n > 0$ et

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + 1 - \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{(n+1) - (n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

2. Affirmation 2 : VRAIE

Pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

On considère les suites (b_n) , (c_n) et (w_n) telles que ;

$$b_n = \left(\frac{9}{7}\right)^n \quad \frac{9}{7} > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

$$c_n = \left(\frac{3}{7}\right)^n \quad 0 \leq \frac{3}{7} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$$

$$w_n = -b_n + c_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = -\infty$$

Pour tout entier naturel n : $u_n \leq w_n$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

L'instruction `for i range(4)` donne i prend successivement les valeurs 0;1;2 et 3.

Pour $i=0$ $U=1+0=1$

Pour $i=1$ $U=1+1=2$

Pour $i=2$ $U=2+2=4$

Pour $i=3$ $U=4+3=7$

donc `terme(4)` renvoie 7.

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Valeur prix A : $15 \times 1000 = 15000$

Valeur prix B : $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{14} = \frac{2^{15} - 1}{2 - 1} = 2^{15} - 1 = 32767 > 15000$

5. Affirmation 5 : VRAIE

Pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \ln(x) dx - \int_1^n \ln(x) dx = \int_1^{n+1} \ln(x) dx + \int_n^1 \ln(x) dx = \int_n^{n+1} \ln(x) dx \geq 0$$

car pour x appartenant à $[n; n+1]$ $\ln(x) \geq 0$.

La suite (v_n) est croissante.