Exercice 1 5,5 points

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$, par $f(x)=x^2-x\ln(x)$.
On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f''(x)=\dfrac{2x-1}{x}$.

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$. On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f'.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x)=x$.

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :
$g(x)=x-\ln(x)$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x)=1$.
Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)-u_n\ln(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

2. Justifier que (u_n) converge.
On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell)=\ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ.

CORRECTION

Partie A

1. x appartient à $]0;+\infty[$ $\quad f(x)=x^2-x\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f(x)=x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. $f'(x)=2x-\ln(x)-x\times\dfrac{1}{x}=2x-1-\ln(x)$

3. $f''(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$

4. $x>0 \quad 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

$2x-1<0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}-1-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln(2)\simeq 0{,}69>0$

Tableau des variations de f'

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f '(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖	↘	ln(2)	↗	

5. Pour tout réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $f'(x)\geqslant\ln(2)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Partie B

1. x appartient à $]0;+\infty[$, $g(x)=x-\ln(x)$

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

Le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de $x-1$.

$g(1)=1-\ln(1)=1>0$

Tableau des variations de g.

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	‖	−	0	+	
g(x)	‖	↘	1	↗	

2. x appartient à $]0;+\infty[$

$f(x)=x \Leftrightarrow x^2-x\ln(x)-x=0 \Leftrightarrow x(x-\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow x(g(x)-1)=0$

$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } g(x)-1=0)$

$x>0$ donc $x\neq 0$ et $g(x)=1 \Leftrightarrow x=1$

donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

Partie C

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation

$u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=f(1)-1\times\ln(1)=f(1)=1$ donc $\frac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$.

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ et on doit démontrer que $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.

Or f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc si $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_n+1)\leqslant f(1)$

et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 0{,}25+0{,}34>\frac{1}{2}$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(1)=1$

donc $\frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

2. Pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et $u_n\leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

Toute suite croissante et majorée est convergente, donc la suite (u_n) est convergente.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $f(\ell)=\ell$

Or l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ est 1 donc $\ell=1$.