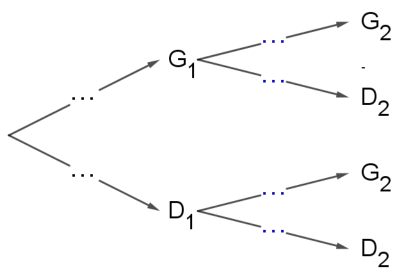
Exercice 2 *5,5 points*

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresser aux chances de victoire de ses prochaines parties.
Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité quelle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la 1ère partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :
. G_n : « Léa gagne la $n^{\text{ième}}$ partie de la journée » ;
. D_n : « Léa perd la $n^{\text{ième}}$ partie de la journée ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'événement G_n .
On a donc $g_1=0,5$.

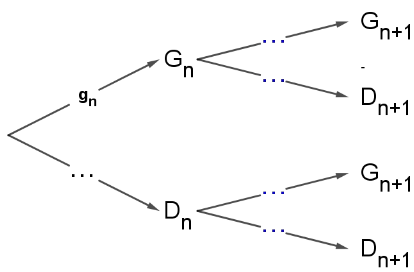
1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{G_1}(D_2)$?

2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .

4. Soit n un entier naturel non nul.
4.a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ parties de la journée.



4.b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul : $g_{n+1}=0,5\,g_n+0,2$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n=g_n-0,4$;
5.a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.
5.b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $g_n=0,1\times0,5^{n-1}+0,4$.

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.

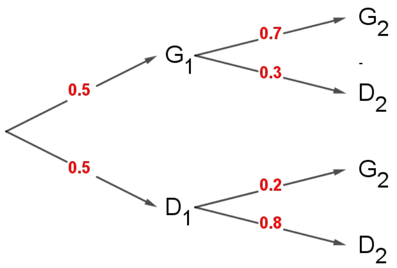
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) soient tous inférieurs ou égaux à $0{,}4+e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e):
2     g=0.5
3     n=1
4     while . . . :
5        g=0.5*g+0.2
6        n= . . .
7     return(n)
```

CORRECTION

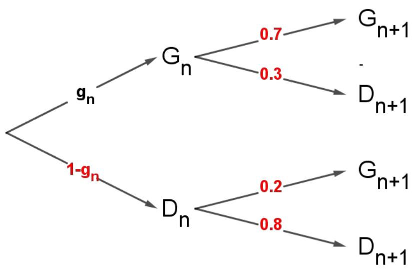
1. Si Léa vient de gagner une partie elle estime gagner la suivante dans 70 % des cas, donc $P_{G_1}(G_2)=0,7$.
G_2 et D_2 sont deux évènements contraires. $P_{G_1}(D_2)=1-P_{G_1}(G_2)=1-0,7=0,3$.

2. De même $P_{D_1}(G_2)=0,2$ et $P_{D_1}(D_2)=1-0,2=0,8$.
Léa a autant de chance de gagner la 1ère partie que de la perdre donc : $P(G_1)=P(D_1)=0,5$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



3. En utilisant la formule des probabilités totales
$g_2=P(G_2)=P(G_1\cap G_2)+P(D_1\cap G_2)=0,5\times 0,7+0,5\times 0,2=0,35+0,1=0,45$.

4.a. $P(G_n)=g_n$ $P(D_n)=1-g_n$ car G_n et D_n sonr des évènements contraires.
$P_{G_n}(G_{n+1})=0,7$ et $P_{G_n}(D_{n+1})=0,3$ et $P_{D_n}(G_{n+1})=0,2$ et $P_{D_n}(D_{n+1})=0,8$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



4.b. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(G_{n+1})=g_{n+1}=P(G_n\cap G_{n+1})+P(D_n\cap G_{n+1})$
$g_{n+1}=g_n\times 0,7+(1-g_n)\times 0,2=0,5\,g_n+0,2$

5.a. Pour tout entier naturel n non nul : $v_n=g_n-0,4$ $\Leftrightarrow$, $g_n=v_n+0,4$
$v_{n+1}=g_{n+1}-0,4=0,5\,g_n+0,2-0,4=0,5\times(v_n+0,4)-0,2=0,5\,v_n$
(v_n) est la suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_1=g_1-0,4=0,5-0,4=0,1$.

5.b. Pour tout entier naturel n non nul : $v_n=v_1\times q^{n-1}=0,1\times 0,5^{n-1}$
$g_n=v_n+0,4=0,1\times 0,5^{n-1}+0,4$.

6. Pour tout entier naturel n non nul :
$g_{n+1}-g_n=0,1\times 0,5^n+0,4-0,1\times 0,5^{n-1}-0,4=0,1\times 0,5^{n-1}\times(0,5-1)=-0,1\times 0,5^{n-1}\times 0,5<0$
(g_n) est une suite décroissante.

7. $0<0,5<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n=0,4$.
Après un très grand nombre de parties jouées, Léa aura 40 % de chances de gagner une partie.

8. $g_n-0,4=0,1\times 0,5^{n-1}>0$
$g_n-0,4\leqslant 0,001$ $\Leftrightarrow$ $0,1\times 0,5^{n-1}\leqslant 0,001$ $\Leftrightarrow$ $0,5^{n-1}\leqslant 0,01$
La fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5^{n-1}) \leqslant \ln(0{,}01) \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\times\ln(0{,}5) \leqslant \ln(0{,}01)$

$0<0{,}5<1$ donc $\ln(0{,}5)<0$

$\Leftrightarrow \quad n-1 \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)}+1$

$\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \simeq 6{,}64$ et n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 8$.

Le plus petit entier naturel n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$ est 8.

9. ligne 4 l'instruction est : while $g-0{,}4>e$:
ligne 5 inchangée
ligne 6 l'instruction est : $n=n+1$
On obtient :

```
1 def seuil(e):
2     g=0.5
3     n=1
4     while g-0.4>e:
5         g=0.5*g+0.2
6         n= n+1
7     return(n)
```