

Exercice 3

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

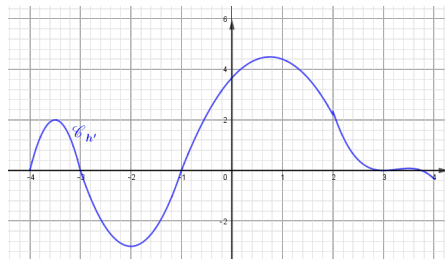
1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

Affirmation 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1; 3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple 1232BA).

Affirmation 3 : il existe 20634 codes qui contiennent au moins un 0.

4. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 4 : la fonction f est une solution de l'équation différentielle $xy' - y = x$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel non nul :

$$3n^2 + 4n + 7 = n^2 \left(3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2} \right) \quad 6n^2 = n^2 \left(6 + \frac{1}{n^2} \right) \quad \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{6 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que (u_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

Preuve

f est dérivable sur $[-4;4]$.

f est convexe sur un intervalle contenu dans l'intervalle $[-4;4]$ si et seulement si f' est croissante sur cet intervalle.

Par lecture graphique : f' est croissante sur $[-1;0,75]$ et décroissante sur $[0,75;3]$.

f n'est pas convexe sur $[-1;3]$.

3. Affirmation 3 : VRAIE

Preuve

On veut déterminer le nombre de codes possibles.

Il y a 10 chiffres de 0 à 9, il y a donc 10^4 possibilités d'écrire 4 chiffres successifs (éventuellement identiques), il y a 3 possibilités pour le choix de la première lettre et deux possibilités pour le choix de la deuxième lettre (donc 6 possibilités pour les deux lettres : AB, AC, BA, BC, CA, et CB).

Nombre de codes possibles : $10^4 \times 6 = 60000$.

On détermine le nombre de codes ne contenant pas 0.

Il y a 9 chiffres non nuls. On obtient donc $9^4 \times 6 = 39366$.

Le nombre de codes contenant au moins un zéro est $60000 - 39366 = 20634$.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

x appartient à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) = x + \ln(x)$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$x f'(x) - f(x) = x(\ln(x) + 1) - x \ln(x) = x \ln(x) + x - x \ln(x) = x$$

donc f est une solution de l'équation différentielle $xy' - y = x$ sur $]0;+\infty[$.