## Exercice 4 — 5 points

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :
$(P):\ 2x+2y-3z+1=0$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées :
$A(1;0;1)$, $B(2;-1;1)$ et $C(-4;-6;5)$.
Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

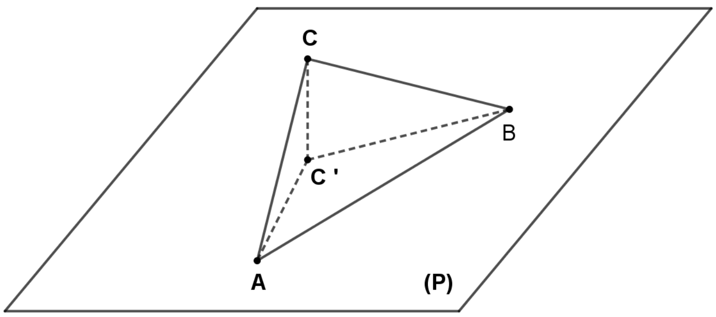
**Partie A**

**1.** Pour chacun des points A, B et C s'il appartient au plan (P).

**2.** Montrer que $C'(0;-2;-1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

**3.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

**4.** On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions :
$\begin{cases} H\in(AB) \\ \text{(AB) et (HC) sont orthogonales} \end{cases}$
Déterminer les coordonnées du point H




**Partie B**

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer la valeur exacte de .
**2.** Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur de S.

**Partie C**

On admet que $HC'=\sqrt{\frac{17}{2}}$

**1.** Soit $\alpha=\widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.

**2.a.** Montrer que les droites (C'H) et (AB) sont perpendiculaires.
**2.b.** Calculer l'aire S' du triangle ABC', en donner la valeur exacte.
**2.c.** Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

CORRECTION

**Partie A**

**1.** $(P):\ 2x+2y-3z+1=0$

$A(1;0;1)$ $2\times1+2\times0-3\times1+1=2-3+1=0$ A appartient au plan (P).

$B(2;-1;1)$ $2\times2+2\times(-1)-3\times1+1=4-2-3+1=0$ B appartient au plan (P).

$C(-4;-6;+5)$ $2\times(-4)+2\times(-6)-3\times5+1=-8-12-15+1=-34\neq0$ C n'appartient pas au plan (P).

**2.** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P).

**C'** est le projeté orthogonal de C sur (P) si et seulement si **C'** appartient au plan (P) et $\overrightarrow{CC'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

$C'(0;-2;-1)$ $2\times0+2\times(-2)-3\times(-1)+1=0-4+3+1=0$ **C'** appartient au plan (P).

$\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}=2\vec{n}$

**C' est le projeté orthogonal de C sur (P).**

**3.** $A(1;0;1)$ $B(2;-1;1)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$M(x;y;z)$ appartient au plan (P) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=1\times t+1\\y=-1\times t+0\\z=0\times t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

**4.** H appartient à (AB) donc $H(t+1;-t;1)$ avec $t\in\mathbb{R}$ $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}t+1+4\\-t+6\\1-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}t+5\\-t+6\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=1\times(t+5)-1\times(-t+6)+0\times(-4)=t+5+t-6=2t-1$

(AB) et (CH) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0$ $\Leftrightarrow$ $2t-1=0$ $\Leftrightarrow$ $t=\frac{1}{2}$.

$x_H=\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}$ $y_H=-\frac{1}{2}$ $z_H=1$ $H\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};1\right)$

**Partie B**

**1.** $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$ $HC^2=\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\left(-\frac{11}{2}\right)^2+4^2=\frac{121}{2}+\frac{121}{2}+16=\frac{121+121+64}{4}=\frac{306}{4}$

$306=2\times9\times17$ $HC^2=\frac{2\times9\times17}{4}=9\times\frac{17}{2}$ et $HC=\|\overrightarrow{HC}\|=3\sqrt{\frac{17}{2}}$ (unité de longueur) ;

**2.** H appartient à la droite (AB), les droites (AB) et (HC) sont orthogonales donc HC est la hauteur du triangle ABC issue de C.

S est l'aire (en unité d'aire) du triangle ABC donc $S=\frac{1}{2}AB\times HC$

$AB^2=1^2+(-1)^2+0^2=2$ et $AB=\sqrt{2}$

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{\frac{17}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{17}$ ( en unité d'aire).

**Partie C**

**1.** On admet que $HC'=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$

$H\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$ $C'(0;-2;-1)$ $\overrightarrow{HC'}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{HC}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times\left(-\dfrac{11}{2}\right)+\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times\left(-\dfrac{11}{2}\right)+(-2)\times 4=\dfrac{33}{4}+\dfrac{33}{4}-8=\dfrac{33+33-32}{4}=\dfrac{34}{4}=\dfrac{17}{2}$

$\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{HC}=HC'\times HC\times\cos(\widehat{CHC'})=\sqrt{\dfrac{17}{2}}\times 3\sqrt{\dfrac{17}{2}}\times\cos(\alpha)=\dfrac{17}{2}\Leftrightarrow 3\times\dfrac{17}{2}\cos(\alpha)=\dfrac{17}{2}$

$\Leftrightarrow\cos(\alpha)=\dfrac{1}{3}$

**2.a.** $\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times 1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times(-1)-2\times 0=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}=0$

Les droites (HC') et (AB) sont orthogonales et H appartient à la droite (AB) donc (HC') et (AB) sont perpendiculaires.

**2.b.** HC' est la hauteur du triangle ABC' issue de C'.

$S'=\dfrac{1}{2}\times AB\times HC'=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{17}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{17}$ (en unité d'aire).

**2.c.** $S=3\times S'$ donc $\dfrac{S'}{S}=\dfrac{1}{3}=\cos(\alpha)$