Exercice 1 5 points

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle [0;1] par : $f(x)=\dfrac{0,96\,x}{0,93\,x+0,03}$.

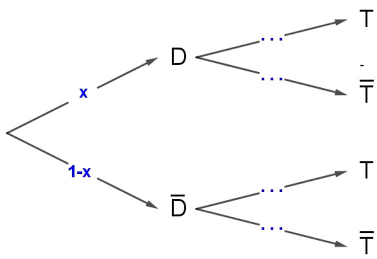
1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [0;1] : $f'(x)=\dfrac{0,0288}{(0,93\,x+0,03)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur [0;1].

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents.
On propose d'étudier la fiabilité de ce test.
On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :
. la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96.
. la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.
On note :
. D l'événement : « le sportif est dopé ».
. T l'événement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

3. Démontrer que la probabilité de l'événement T est égale à $0,93\,x+0,03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1000 testés.
La fonction f désigne la fonction définie à la partie A. Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est à $f(0,05)$.
En donner une valeur arrondie au centième.

5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

5.a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9.
Arrondir au centième.

5.b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ?
Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.

CORRECTION

Partie A

1. x appartient à [0;1] et $f(x)=\dfrac{0,96\,x}{0,93\,x+0,03}$.

$u(x)=0,96\,x \quad u'(x)=0,96 \quad v(x)=0,93\,x+0,03 \quad v'(x)=0,93$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{0,96\times(0,93\,x+0,03)-0,96\,x\times 0,93}{(0,93\,x+0,03)^2}=\frac{0,93\times 0,03}{(0,93\,x+0,03)^2}$$

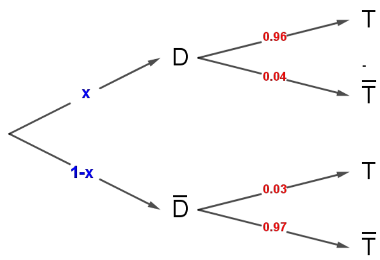
$$f'(x)=\frac{0,0288}{(0,93\,x+0,03)^2}$$

2. Pour tout réel x de l'intervalle [0;1], on a : $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur [0;1].

Partie B

1. L'énoncé précise :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 donc $P_D(T)=0,96$ et $P_D(\overline{T})=1-0,96=0,04$.
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03 donc $P_{\overline{D}}(T)=0,03$ et $P_{\overline{D}}(\overline{T})=1-0,03=0,97$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. $P(D\cap T)=P(D)\times P_D(T)=x\times 0,96=0,96\,x$

3. En utilisant le théorème des probabilités totales :

$P(T)=P(D\cap T)+P(\overline{D}\cap T)$

$P(\overline{D}\cap T)=P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(T)=(1-x)\times 0,03=0,03-0,03\,x$

$P(T)=0,96\,x+0,03-0,03\,x=0,93\,x+0,03$

4. Il y a 50 sportifs dopés parmi les 1000 testés donc $x=\dfrac{50}{1000}=0,05$.

$$P_T(D)=\frac{P(D\cap T)}{P(T)}=\frac{0,96\,x}{0,93\,x+0,03}=f(x)$$

Pour x=0,05 $P_T(D)=\dfrac{0,96\times 0,05}{0,93\times 0,05+0,03}$ $\quad P_D(T)=0,63$ arrondi au centième.

5.a. La valeur prédictive positive du test est : $P_T(D)=\dfrac{P(D\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,96\,x}{0,93\,x+0,03}=f(x)$.

On veut : $f(x)\geqslant 0,9 \iff \dfrac{0,96\,x}{0,93\,x+0,03}\geqslant 0,9 \iff 0,96\,x\geqslant 0,93\times 0,9\,x+0,9\times 0,03$

$\iff 0,96\,x-0,837\,x\geqslant 0,027 \iff 0,123\,x\geqslant 0,027 \iff x\geqslant\dfrac{0,027}{0,123}=\dfrac{9}{41}$

$\dfrac{9}{41}=0,22$ arrondi au centième.

Il faut plus de 22 % de sportifs dopés pour avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,9.

5.b. La valeur prédictive positive du test va augmenter car la fonction f est strictement croissante sur [0;1].

Si on décide de cibler que les sportifs les plus performants, supposés être plus fréquemment dopés donc la valeur de x est supposée augmenter et f(x) va augmenter.