Exercice 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x)=2xe^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [0;1].

1.a. Résoudre sur l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x)=x$.
1.b. Démontrer que, pour tout x, appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f'(x)=2(1-x)e^{-x}$.
1.c. Donner le tableau de variation sur l'intervalle [0;1].

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0{,}1$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=f(u_n)$.

2.a. Démontrer par réccurence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n<u_{n+1}\leqslant 1$.
2.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4.a. Justifier que pour entier naturel n, $\ln(2)-u_n$ est positif.
4.b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de ln(2) à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2)-u . . .0.0001
    n=n+1
    u= . . . .
  return (n,u)
```

4.c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil().

CORRECTION

1.a. x est un réel de l'intervalle [0;1].

$f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,e^{-x}=x \quad \Leftrightarrow \quad x(2e^{-x}-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=0 \text{ ou } 2e^{-x}-1=0)$

$2e^{-x}-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{-x}=1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -x=-\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)$

$\ln(2)\simeq 0{,}69$ appartient à l'intervalle [0;1.

L'équation f(x)=x admet 2solutions : 0 et ln(2).

1.b. Pour tout réel x de l'intervalle [0;1], on a : $(e^{-x})'=-e^{-x}$

donc $f'(x)=2e^{-x}-2x\,e^{-x}=2(1-x)e^{-x}$.

1.c. Pour tout réel x de l'intervalle [0;1], on a : $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de 1-x.

$f'(1)=0$ et pour $0\leqslant x<1$ $f'(x)>0$.

f est strictement croissante sur $[0;1]$.

$f(0)=0$ et $f(1)=2e^{-1}<1$.

x	0	1
f '(x)	+	
f(x)	0	$2e^{-1}$

2.a. On veut démontrer en utilisant en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n<u_{n+1}\leqslant 1$.

<u>Initialisation</u>

Pour n=0, $u_0=0{,}1$ et $u_1=f(0{,}1)=0{,}2\,e^{-0,1}\simeq 0{,}18$ donc $0\leqslant u_0<u_1\leqslant 1$ et la propriété est vérifiée pour n=0.

<u>Hérédité</u>

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $0\leqslant u\,n<u_{n+1}\leqslant 1$ et on doit démontrer que $0\leqslant u_{-n+1}<u_{n+2}\leqslant 1$.

Si $0\leqslant u_n<u_{n+1}\leqslant 1$ alors $f(0)\leqslant f(u_n)<f(u_{n+1})\leqslant f(1)$ car f est strictement croissante sur [0;1].

Or $f(0)=0$, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(1)=2e^{-1}\simeq 0{,}74\leqslant 1$ donc $0\leqslant u_{n+1}<u_{n+2}\leqslant 1$.

<u>Conclusion</u>

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n<u_{n+1}\leqslant 1$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $u_n<u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante et $u_{n+1}\leqslant 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.

Toute suite croissante et majorée est convergente.

3. On note L la limite de la suite (u_n), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.

Pour tout entier naturel n, $f(u_n)=u_{n+1}$ donc $f(L)=L$ et L est une solution de l'équation $f(x)=x$.

Or $u_0=0{,}1$ et pour tout entier naturel n, on a : $0{,}1=u_0\leqslant u_n$ donc $L\neq 0$ et $L=\ln(2)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ln(2)$.

4.a. On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que $\ln(2)-u_n>0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)>u_n$.

Pour n=0 $\ln(2)>u_0=0{,}1$ et si $\ln(2)>u_n$ alors $f(\ln(2))>f(u_n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)>u_{n+1}$

donc pour tout entier naturel n, on a : $\ln(2)-u_n>0$.

4.b. On complète le script :

ligne 4 while $\ln(2)-u>0{,}0001$

ligne 6 $u=2*u*\exp(-u)$

```
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2)-u> 0.0001
    n=n+1
    u= 2*u*exp(-u)
  return (n,u)
```

4.c. Si on dispose d'un matériel permettant d'utiliser le programme Python o obtient : $n=11$.
Sinon, en admettant que la valeur de n n'est pas très grande, on peut utiliser un tableur ou la calculatrice en programmant la fonction f.
La calculatrice donne ln(2) avec huit décimales :
$\ln(2)=0,69314718$
$u_0=0,1$
$u_1=0,18\ldots$
$u_2=0,30\ldots$
$u_3=0,44\ldots$
$u_4=0,57\ldots$
$u_5=0,64\ldots$
$u_6=0,67\ldots$
$u_7=0,688\ldots$
$u_8=0,69155\ldots$
$u_9=0,69205\ldots$
$u_{10}=0,692996\ldots$
$u_{11}=0,6931002$