Exercice 3 5 points

On considère l'équation différentielle :
(E_0) : $y' = y$.
où y est une fonction dérivable de variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_0) .

On considère l'équation différentielle :
(E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « f-h est solution de (E_0) ».

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7. Calculer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)]\,dx$$

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x, $f(x)=k$ (constante) donc $f'(x)=0$.

$f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=0$.

L'unique fonction constante solution de l'équation (E_0) est la fonction nulle.

2. a étant un nombre réel non nul fixé, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'=ay$ est l'ensemble des fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x)=\lambda e^{ax}$ avec λ constante réelle.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) est l'ensemble des fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x)=\lambda e^x$ avec λ constante réelle.

3. Pour tout nombre réel x, $(\cos(x))'=-\sin(x)$ et $(\sin(x))'=\cos(x)$.

$h(x)=2\cos(x)+\sin(x)$ donc $h'(x)=-2\sin(x)+\cos(x)$.

Pour tout nombre réel x :

$h(x)-\cos(x)-3\sin(x)=2\cos(x)+\sin(x)-\cos(x)-3\sin(x)=-2\sin(x)+\cos(x)$

donc $h'(x)=h(x)-\cos(x)-3\sin(x)$ et h est solution de l'équation différentielle (E).

4. Si f est solution de l'équation différentielle (E) alors pour tout nombre réel x :

$f'(x)=f(x)-\cos(x)-3\sin(x)$ donc

$(f-h)'(x)=f'(x)-h'(x)=f(x)-\cos(x)-3\sin(x)-(h(x)-\cos(x)-3\sin(x))=f(x)-h(x)=(f-h)(x)$

$f-h$ est solution de (E_0).

. Réciproquement

Si $f-h$ est solution de (E_0) alors pour tout nombre réel x, $(f-h)'(x)=(f-h)(x)$ soit

$f'(x)-h'(x)=f(x)-h(x) \Leftrightarrow f'(x)=f(x)-h(x)+h'(x)=f(x)-2\cos(x)-\sin(x)+\cos(x)-2\sin(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)=f(x)-\cos(x)-3\sin(x)$ et f est solution de (E).

5. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f_λ telles que $(f_\lambda-h)$ soient solutions de (E_0) c'est à dire, pour tout nombre réel x, $(f_\lambda-h)(x)=\lambda e^x \Leftrightarrow f_\lambda(x)=\lambda e^x+2\cos(x)+\sin(x)$

6. Pour tout réel x, $g(x)=\lambda e^x+2\cos(x)+\sin(x)$.

$g(0)=0 \Leftrightarrow \lambda e^0+2\cos(0)+2\sin(0)=\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$

$g(x)=-2e^x+2\cos(x)+\sin(x)$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-2e^x+2\cos(x)+\sin(x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx$

$G(x)=-2e^x+2\sin(x)-\cos(x)$ G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=[G(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=-2e^{\frac{\pi}{2}}+2+2+0+1=5-e^{\frac{\pi}{2}}$