Exercice 4 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère :

. les points $A(-2;0;2)$; $B(-1;3;0)$; $C(1;-1;2)$ et $D(0;0;3)$.

. la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=3+5t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

. la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1+3s \\ y=-1-5s \\ z=2-6s \end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

2.b. Justifier qu'une qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+3y+5z-8=0$.

2.c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3.a. Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.
On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

3.b. Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4.a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

4.b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Arrondir le résultat au centième.

CORRECTION

1. $A(-2;0;2)$ $B(-1;3;0)$ $C(1;-1;2)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Il n'existe pas de nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB}=\lambda.\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2.a. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times1+3\times3+5\times(-2)=1+9-10=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1\times3+3\times(-1)+5\times0=3-3=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal au plan (ABC).

2.b. (ABC) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$M(x;y;z)$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y+0\\z-2\end{pmatrix}$

M appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow$ $1\times(x+2)+3\times(y)+5\times(z-2)=0$ $\Leftrightarrow$ $x+3y+5z+2-10=0$

$\Leftrightarrow$ $x+3y+5z-8=0$.

2.c. $D(0;0;3)$

$0+3\times0+5\times3-8=15-8=7\neq0$ donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) et les points A, B C et D ne sont pas coplanaires.

3.a. $\mathscr{D}_1$: $\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=3+5t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ $D(0;0;3)$.

Pour t=0 on a x=0, y=0 et z=3 donc D est un point de $\mathscr{D}_1$.

$\vec{V}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ or $\vec{V}=\vec{n}$ donc $\vec{V}$ est un vecteur orthogonal au plan (ABC)

et $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

3.b. On doit résoudre : $\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=3+5t\\x=1+3s\\y=-1-5s\\z=2-6s\end{cases}$

On obtient : $\begin{cases}t=1+3s\\3t=-1-5s\\3+5t=2-6s\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}t-3s=1 & (a)\\3t+5s=-1 & (b)\\5t+6s=-1 & (c)\end{cases}$

(a) et (b) $-3(t-3s)+3t+5s=-3\times1-1$ $\Leftrightarrow$ $14s=-4$ $\Leftrightarrow$ $s=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7}$

dans (a) $t-3\times\left(-\frac{2}{7}\right)=1$ $\Leftrightarrow$ $t=1-\frac{6}{7}$ $\Leftrightarrow$ $t=\frac{1}{7}$

on vérifie dans l'équation (c) :

$5\times\frac{1}{7}+6\times\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{5-12}{7}=-\frac{7}{7}=-1$

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes, on note K leur point d'intersection

$x_K=\frac{1}{7}$ $y_K=\frac{3}{7}$ $z_K=3+5\times\frac{1}{7}=\frac{26}{7}$ $K\left(\frac{1}{7};\frac{3}{7};\frac{26}{7}\right)$.

4.a. On veut déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite $\mathscr{D}_1$.

On résout le système : $\begin{cases} x+3y+5z-8=0 \\ x=t \\ y=3t \\ z=3+5t \end{cases}$

On obtient : $t+3\times(3t)+5\times(3+5t)-8=0 \Leftrightarrow t+9t+15+25t-8=0 \Leftrightarrow 35t=-7$

$\Leftrightarrow \quad t=-\frac{7}{35}=-\frac{1}{5}$.

On note H le point d'intersection du plan (ABC) et de la droite $\mathscr{D}_1$.

$x_H=-\frac{1}{5} \quad y_H=-\frac{3}{5} \quad z_H=3+5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=3-1=2 \qquad H\left(-\frac{1}{5};-\frac{3}{5};2\right)$.

4.b. La distance du point au plan (ABC) est égale à la distance DH.

$D(0;0;3)$

$DH^2=\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2+(-1)^2=\frac{1}{25}+\frac{9}{25}+1=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}=1{,}4$

$DH=\sqrt{1{,}4}=1{,}18$ arrondi au centième.