Exercice 1 *5 points*

Un sac opaque contient, huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, on note son numéro, puis on le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le numéro 4, puis le numéro 5, puis le numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4;5;1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2.a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
2.b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On note $S=X_1+X_2+X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable S.

6. Déterminer $P(S=24)$.

7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
7.a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
7.b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

CORRECTION

1. Le sac contient 8 jetons, on pioche 3 jetons avec remise, donc le nombre de tirage est : $8^3=512$.

2.a. 1^{er} jeton pioché : 8 possibilités
$2^{ème}$ jeton pioché : 7 possibilités (on ne peut pas prendre le numéro du 1^{er} jeton pioché)
$3^{ème}$ jeton pioché : 6 possibilités (on ne peut pas prendre les deux numéros des jetons déjà piochés).
Le nombre de tirages sans répétition est : $8\times7\times6=336$.

2.b. Le nombre de tirages qui contient au moins une répétition est : $8^3-8\times7\times6=512-336=176$.

3. Les jetons sont indiscernables au toucher donc la loi de probabilité est la équiprobable.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. $E(X_1)=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}=4{,}5$.

5. Les lois de probabilité de X_2 et X_3 sont identiques à celle de X_1 (les tirages se font avec remise).
$S=X_1+X_2+X_3$
$E(S)=S(X_1)+S(X_2)+S(X_3)=3\times4{,}5=13{,}5$

6. Il y a un seul tirage donnant $S=24$ c'est le tirage : $(8;8;8)$.
$P(S=24)=\frac{1}{512}$.

7.a. 1 tirage donne la somme $S=24$: $(8;8;8)$
3 tirages donnent la somme $S=23$: $(7;8;8)$; $(8;7;8)$; $(8;8;7)$
6 tirages donnent la somme $S=22$: $(6;8;8)$; $(8;6;8)$; $(8;8;6)$; $(8;7;7)$; $(7;8;7)$; $(7;7;8)$
donc 10 tirages donnent une somme supérieure ou égale à 22.

7.b. La probabilité de gagner un lot est : $P(S\geqslant22)=\frac{10}{512}=\frac{5}{256}$.