Exercice 2 — 6 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1.a. Déterminer la limite de f en 1.
1.b. En déduire une une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.
3.b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

4. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.
4.a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.
4.b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4.c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $e^x\geqslant(-2x-1)(x-1)$.

5.a. Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty;1[$.
5.b. À l'aide de la calculatrice,déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ x appartient à l'intervalle $]-\infty;1[$.

On a $x<1$ donc $x-1<0$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1}e^x=e^1>0$ donc $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$.

1.b. La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f : $\mathscr{C}$.

2. $f(x)=e^x\times\dfrac{1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

3.a. $f=\dfrac{u}{v}$ $f'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=e^x$ $u'(x)=e^x$ $v(x)=x-1$ $v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x-1\times e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

3.b. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $x-2<0$, $e^x>0$ et $(x-1)^2>0$ donc $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

Tableau de variation de f

x	-∞		1
f '(x)		–	‖
f(x)	0	↘	-∞

4. On admet que $f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$, pour tout x de l'intervalle $]-\infty;1[$.

4.a. $T(x)=x^2-4x+5$ $\Delta=16-4\times1\times4=-4<0$

Pour tout x de l'intervalle $]-\infty;1[$, $T(x)>0$ et $e^x>0$ et $(x-1)^3<0$ donc $f''(x)<0$.

f est une fonction concave sur $]-\infty;1[$.

4.b. T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0, $f(0)=\dfrac{e^0}{0-1}=-1$ donc $A(0;-1)$.

Le coefficient directeur de T est $f'(0)=\dfrac{-2e^0}{(0-1)^2}=-2$, l'abscisse à l'origine de T est : $f(0)=-1$.

T : $y=-2x-1$

4.c. f est concave sur $]-\infty;1[$ donc $\mathscr{C}$ est en dessous de toutrs ses tangentes sur $]-\infty;1[$ en particulier $\mathscr{C}$ est en dessous de T et pour tout x de l'intervalle $[-\infty;1[$, on a :

$f(x)\leqslant-2x-1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x-1}\leqslant 2x-1 \Leftrightarrow e^x\geqslant(-2x-1)(x-1)$ (car x-1<0)

5.a. f est dérivable (donc continue) et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1[$ à valeurs dans $]-\infty;0[$, -2 appartient à l'intervalle $]-\infty;0[$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que -2 admet un unique antécédent α par f appartenant à l'intervalle $]-\infty;1[$ c'est à dire que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]-\infty;1[$.

5.b. $f(0)=-1$ donc $0<\alpha<1$.

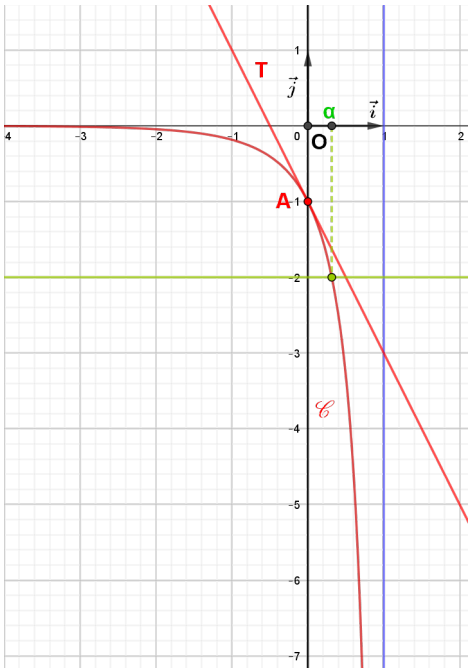
Par balayage on obtient :

$f(0{,}31)\simeq-1{,}98>-2$ $f(0{,}32)\simeq-2{,}03<-2$

Donc $0{,}31<\alpha<0{,}32$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On joint une figure , non demandée mais que l'on obtient facilement sur la calculatrice.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés