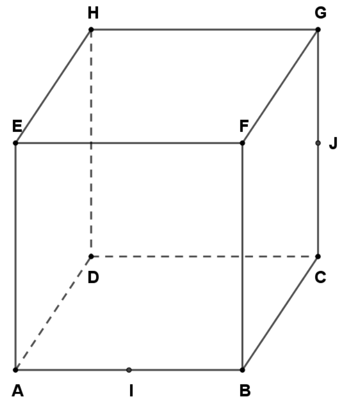
Exercice 3 — 5 points

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1cm.
Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de I et J.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est : $-2x-2y+z+1=0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

5.a. On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).
Calculer ses coordonnées.

5.b. Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\frac{1}{6}$ cm³.

On pourra utiliser le point L, milieu du segment [EF].
On admet que ce point est le projeté orthogonal du
I sur le plan (EFH).

5.c. Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

CORRECTION

1. $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé du plan.

I est le milieu de [AB] $\quad A(0;0;0) \quad B(1;0;0) \quad I\left(\frac{1}{2};0;0\right) \quad I(0{,}5;0;0)$

J est le milieu de [CG] $\quad C(1;1;0) \quad G(1;1;1) \quad J\left(1;1;\frac{1}{2}\right) \quad J(1;1;0{,}5)$

2. $E(0;0;1) \qquad \overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EJ}$ est un vecteur normal au plan (FHI) si et seulement si $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (FHI) par exemple les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$.

$\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FH}=1\times(-1)+1\times1-0{,}5\times0=-1+1=0$

$\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FI}=1\times(-0{,}5)+1\times0-0{,}5\times(-1)=-0{,}5+0{,}5=0$

donc $\overrightarrow{EJ}$ est un vecteur normal au plan (FHI).

3. $M(x;y;z)$ appartient au plan (FHI) si et seulement si $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}$

M appartient au plan (FHI) $\Leftrightarrow \overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y-0)-0{,}5\times(z-1)=0$

$\Leftrightarrow \quad x+y-0{,}5z-0{,}5=0$.

En multipliant les deux membres par -2.

$(FHI):\ -2x-2y+z+1=0$.

4. La droite (EJ) est la droite passant par $E(0;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}$

donc $(EJ):\ \begin{cases}x=t+0\\y=t+0\\z=-0{,}5t+1\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$

5.a. Le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI) c'est à dire l'intersection du plan (FHI) et la droite (EJ).

On résout le système : $\begin{cases}-2x-2y+z+1=0\\x=t\\y=t\\z=-0{,}5t+1\end{cases}$

On obtient : $-2t-2t-0{,}5t+1+1=0 \Leftrightarrow -4{,}5t+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{4{,}5}=\frac{4}{9}$

$x=\frac{4}{9} \qquad y=\frac{4}{9} \qquad z=-0{,}5\times\frac{4}{9}+1=-\frac{2}{9}+1=\frac{-2+9}{9}=\frac{7}{9}$

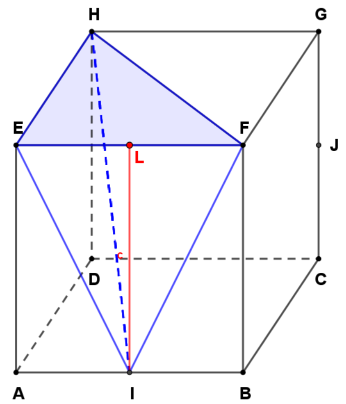
$K\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$

5.b. EFHI est un tétraèdre donc une pyramide à bases triangulaires c'est à dire :
pyramide de sommet E est de base FHI ou pyramide de sommet I et de base EFH
ou pyramide de sommet F et de base EHI ou pyramide de sommet h et de base EFI.

Volume d'une pyramide $=\frac{1}{3}\times$aire de la base$\times$hauteur associée à la base

On considère I le sommet et le triangle EFH pour base.
Le triangle EFH est rectangle isocèle en E $\qquad EF=EH=1$

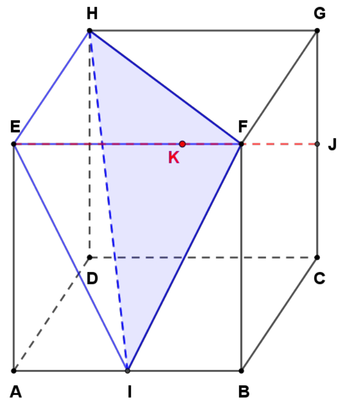
L'aire du triangle EFH est: $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ cm^2



Soit L le milieu de [EF], (IL) est parallèle à (AE) donc (Il) est orthogonal au plan (EFH) et IL est la hauteur associée à la base EFH dans la pyramide EFHI.
Or $IL=AE=1$ cm

$V_{EFHI}=\frac{1}{3}\times A_{EFH}\times IL=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}$ cm^3.

5.c. Si on considère E pour sommet et FHI pour base



EK est la hauteur associée à la base FHI

$E(0;0;1)$ $\quad K\left(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)$

$EK^2=\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{2}{9}\right)^2=\frac{16+16+4}{9^2}=\frac{36}{9^2}=\frac{4}{9}$ $\qquad EK=\frac{2}{3}$

$V_{EFHI}=\frac{1}{3}\times A_{FHI}\times EK$

$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times A_{FHI}\times\frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow$ $A_{FHI}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ cm^3