Exercice 4 — 4 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$.
On admet que cette fonction est dérivable sur cet intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$
$f(x)-\dfrac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$.

3. En déduire que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution : $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction définie dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien défini pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2. En déduire que la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import*
def seuil(n):
  u=5
  i=0
  l=(1+sqrt5)/2
  while abs(u-l)>=10**(-n):
    u=sqrt(u+1)
    i=i+1
  retutn(i)
```

On rappelle que la commande abs(x) renvoie la valeur absolue de x.

4.a. Donner la valeur renvoyée par seuil(2).
4.b. La valeur renvoyée par seuil(4) est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. Si la fonction u est dérivable sur l'intervalle I et si $u>0$ sur I alors $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$I=[0;+\infty[\qquad u(x)=x+1\qquad u'(x)=1$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$

f est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. Pour tout nombre réel x de $[0;+\infty[$

$f(x)-x=\sqrt{x+1}-x$

on a $\sqrt{x+1}+x\geqslant 1$ donc $\sqrt{x+1}+x\neq 0$

$f(x)-x=\dfrac{(\sqrt{x+1}-x)(\sqrt{x+1}+x)}{\sqrt{x+1}+x}=\dfrac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x}=\dfrac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$

x appartient à $[0;+\infty[$

$f(x)=x\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}=0\quad\Leftrightarrow\quad -x^2+x+1=0$

$\Delta=1^2-4\times 1\times(-1)=5\qquad x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0\qquad x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$

Dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution : $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

Initialisation

$u_0=5\qquad u_1=\sqrt{6}\simeq 2{,}45$ donc $1\leqslant u_1\leqslant u_0$

La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ et on doit démontrer que : $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

Si on suppose que $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$, sachant que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors on a $f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ or $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(1)=\sqrt{2}\simeq 1{,}41$

on obtient $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout entier naturel n : $1\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Toute suite décroissante et minorée est convergente donc la suite (u_n) est converge.

3. La fonction f est dérivable (donc continue).

Pour tout entier naturel n, on a : $f(u_n)=u_{n+1}$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ alors $f(\ell)=\ell$

u_n appartient à $[1;+\infty[$ donc ℓ appartient à $[1;+\infty[$.

ℓ est une solution de l'équation de l'équation $f(x)=x$ et l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.a. En utilisant la calculatrice, on trouve rapidement une valeur approchée des premiers termes de la suite que l'on compare à ℓ.

Pour cette question, on donne des valeurs arrondies à 10^{-4} .

$\ell \simeq 1{,}6180$

$u_1 \simeq 2{,}4495$ $\quad u_1 - \ell \simeq 0{,}8315 \geqslant 10^{-2}$

$u_2 \simeq 1{,}8572$ $\quad u_2 - \ell \simeq 0{,}2392 \geqslant 10^{-2}$

$u_3 \simeq 1{,}6903$ $\quad u_3 - \ell \simeq 0{,}0723 \geqslant 10^{-2}$

$u_4 \simeq 1{,}6402$ $\quad u_4 - \ell \simeq 0{,}0222 \geqslant 10^{-2}$

$u_5 \simeq 1{,}6249$ $\quad u_5 - \ell \simeq 0{,}0069 \leqslant 10^{-2}$

donc seuil(2) renvoie **5**

4.b. Si seuil(4) renvoie 9 alors u_9 est le premier terme de la suite (u_n) donnant une valeur approchée décimale à 10^{-4} près de ℓ.