Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit-être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=5xe^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 : l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Affirmation 2 : la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'+y=5e^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 : la suite (v_n) converge vers un nombre ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 4 : pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Preuve

$f(x)=5xe^{-x}=5\times\frac{x}{e^x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

La droite d'équation $y=0$ (c'est à dire l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Affirmation 2 : VRAIE

Preuve

Pour tout nombre réel x, $(e^{-x})'=-e^{-x}$ donc $f'(x)=5\times1\times e^x+5x(-e^{-x})=5e^{-x}-5xe^{-x}$.

et $f'(x)+f(x)=5e^{-x}-5xe^{-x}+5xe^{-x}=5e^{-x}$.

f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'+y=5e^{-x}$

2. Affirmation 3 : FAUSSE

Preuve

Pour démontrer que l'affirmation est fausse, il suffit de donner un contre exemple.

Pour tout entier naturel n :

$u_n=-1-\frac{1}{n+1}$ $\quad u_n\leqslant-1\quad$ $\lim_{n\to+\infty}u_n=-1$

$w_n=1+\frac{1}{n+1}$ $\quad w_n\geqslant1\quad$ $\lim_{n\to+\infty}w_n=1$

$v_n=(-1)^n$ $\quad(v_n)$ n'admet pas de limite et $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$

Affirmation 4 : VRAIE

Preuve

Pour tout entier naturel n :

$u_0\leqslant u_n$ (car la suite (u_n) est croissante) et $w_n\leqslant w_0$ (car la suite (w_n) est décroissante)

et $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ donc $u_0\leqslant v_n\leqslant w_0$.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés