

Exercice 2

5 points

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service de clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Les achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménagers, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasins d'électroménagers 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- . 75 % pour les clients sur internet ;
- . 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- . 80 % pour les clients en grande surface.

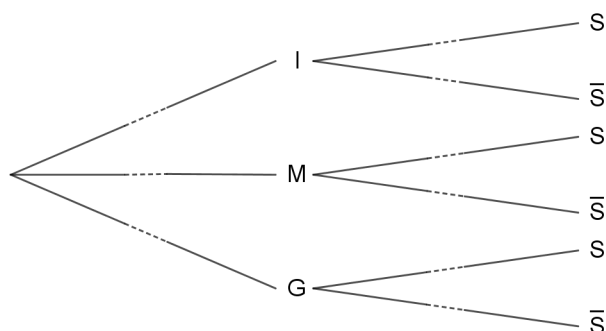
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur.

On définit les événements suivants :

- . I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- . M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- . G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- . S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle.

Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet. On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs de téléviseur.

On suppose le nombre de clients suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

5.a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

5.b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contactés pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet. Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables T_1 et T_2 . La variable T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plate forme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plate forme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables T_1 et T_2 sont indépendantes et on donne :

- . L'espérance $E(T_1)=4$ et la variance $V(T_1)=2$.
- . L'espérance $E(T_2)=3$ et la variance $V(T_2)=1$.

7.a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T .

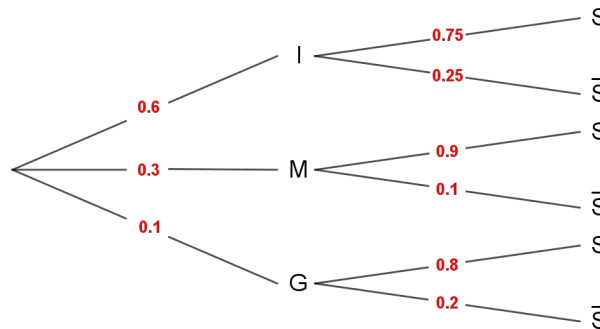
7.b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet, justifier que la probabilité qu'il reçoive un téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

$P(I)=0,6$, $P(M)=0,3$, $P(G)=0,1$, $P_I(S)=0,75$ donc $P_I(\bar{S})=1-0,75=0,25$, $P_M(S)=0,9$
donc $P_M(\bar{S})=1-0,9=0,1$, $P_G(S)=0,8$ donc $P_G(\bar{S})=1-0,8=0,2$.

On obtient l'arbre des probabilités suivant :



2. On nous demande de calculer : $P(I \cap S)$.

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$$

3. En utilisant le théorème des probabilités totales, on obtient :

$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8$$

$$P(S) = 0,8$$

4. On nous demande de calculer $P_S(I)$.

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = 0,563 \text{ arrondi à } 10^{-3} \text{ près.}$$

5.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

on contacte au hasard un acheteur de téléviseur.

Succès : « le client est satisfait du service de clientèle »

la probabilité de succès est : $p = P(S) = 0,8$.

Échec : « le client n'est pas satisfait du service de clientèle »

la probabilité de l'échec est : $q = P(\bar{S}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Le choix des 30 clients peut-être comme un tirage avec remise, c'est à dire que l'on effectue 30 épreuves de Bernoulli indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 30 épreuves, la de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,8$.

5.b. En utilisant la calculatrice on obtient :

$$P(X \geq 25) = 0,428 \text{ arrondi à } 10^{-3} \text{ près.}$$

6. Soit n la taille de l'échantillon choisi.

La probabilité qu'au moins un des clients ne soit pas satisfait du service clientèle est : $1 - 0,8^n$.

$$\text{On veut : } 1 - 0,8^n > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,99 > 0,8^n \Leftrightarrow 0,01 > 0,8^n$$

la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; \infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,01) > \ln(0,8^n) \Leftrightarrow \ln(0,01) > n \times \ln(0,8)$$

$$0 < 0,8 < 1 \text{ donc } \ln(0,8) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} < n$$

$$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \simeq 20,64 \text{ et } n \text{ est un entier naturel.}$$

$$\Leftrightarrow 21 \leq n$$

21 est la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité qu'au moins un des clients ne soit pas satisfait du service de clientèle soit supérieure à 0,99

7.a. $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$

Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes donc :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3.$$

7.b. L'univers image de T est une partie de l'ensemble des entiers naturels.

L'évènement le client reçoit le téléviseur entre 5 et 9 jours est l'évènement

$$|T - E(T)| \leq 2 \quad \text{car } E(T) = 7.$$

L'évènement contraire est $|T - E(T)| > 2$ c'est à dire $|T - E(T)| \geq 3$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$\text{pour tout nombre réel } t \text{ strictement positif : } P(|T - E(T)| \geq t) \leq \frac{V(T)}{t^2}$$

pour $t=3$ et $V(T)=3$

$$P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$$

pour la probabilité de l'évènement contraire, on obtient :

$$P(|T - E(T)| \leq 2) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$