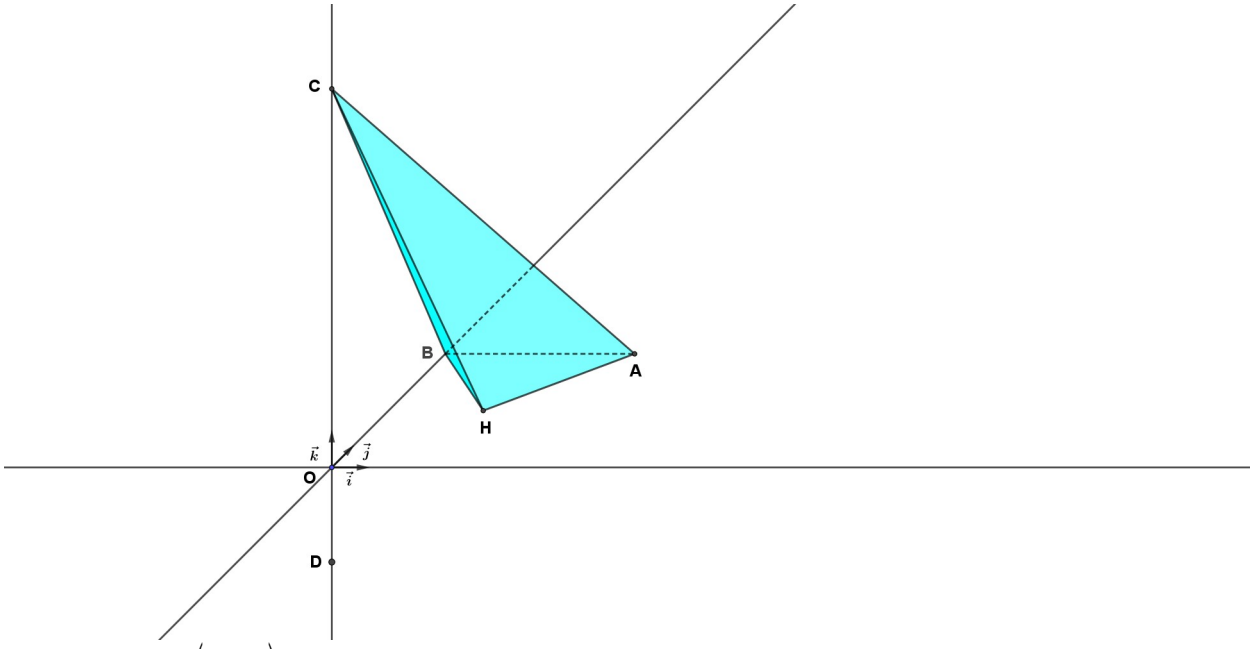
Exercice 3 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points : $A(5;5;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;10)$ et $D\left(0;0;-\frac{5}{2}\right)$



1.a. Montrer que $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

1.b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation : $x-y=0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=\frac{5}{2}t\\y=5-\frac{5}{2}t\\z=0\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

2.a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

2.b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3.a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

3.b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4.a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

4.b. *On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par* $V=\frac{1}{3}\mathscr{B}h$ *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et* h *est la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B.
Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. $\vec{n}_1$ est un vecteur normal au plan (CAD) si et seulement si le vecteur $\vec{n}_1$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD), par exemples $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$$

$\vec{n}_1.\overrightarrow{CA}=1\times5-1\times5+0\times(-10)=5-5=0$

$\vec{n}_1.\overrightarrow{CD}=1\times0-1\times0+0\times\left(-\frac{25}{2}\right)=0$.

$\vec{n}_1$ est un vecteur normal au plan (CAD).

1.b. $M(x;y;z)$ appartient au plan (CAD) si et seulement si $\vec{n}_1.\overrightarrow{CM}=0$

$$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-10\end{pmatrix}$$

$\vec{n}_1.\overrightarrow{CM}=1\times x-1\times y+0\times(z-10)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-y=0$

2.a. Pour déterminer l'intersection du plan(CAD) et de la droite $\mathscr{D}$, on résout le système :

$$\begin{cases}x-y=0\\x=\frac{5}{2}t\\y=5-\frac{5}{2}t\\z=0\end{cases}$$

on obtient : $\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5t=t \quad\Leftrightarrow\quad t=1$

$x_H=\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{2}$ $\qquad y_H=5-\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{2}$ $\qquad z_H=0$ $\qquad H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$

2.b. Le point H appartient au plan (CAD) donc H est le projeté orthogonal du point B sur le plan (CAD) si et seulement si (BH) est orthogonale au plan (CAD) c'est à dire et seulement si $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires.

$$B(0;5;0) \qquad H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right) \qquad \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BH}=\frac{5}{2}\vec{n}_1$$

et H est le projeté orthogonal du point B sur le plan (CAD).

3.a. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}=-\frac{5}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)+0\times0=-\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=0$.

Le triangle ABH est rectangle en H.

3.b. $\mathscr{A}_{ABH}=\frac{1}{2}\times AH\times BH$

$AH^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2+0^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{50}{4}$ $\qquad AH=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5}{2}\times\sqrt{2}$

$BH^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2+0^2=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{50}{4}$ $\qquad BH=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5}{2}\times\sqrt{2}$

$\mathscr{A}_{ABH}=\frac{1}{2}\times\frac{(5\times\sqrt{2})^2}{4}=\frac{25}{4}$ (unité d'aire).

4.a. Les points A, B et H appartiennent au plan d'équation : $z=0$.
(CO) est orthogonal au plan d'équation $z=0$ donc au plan (ABH) et O appartient au plan (ABH).
(CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH) issue de C.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.b. $C(0;0;10)$ $OC=10$ (unité de longueur) $\mathcal{B}=\mathcal{A}_{ABH}=\dfrac{25}{4}$.

$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{25}{4}\times 10=\dfrac{125}{6}$ (unité de volume).

5. La distance d du point H au plan (ABC) est égale à la hauteur du tétraèdre ABCH issue de H.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}$ $BA=5$ $BC^2=125$ $BC=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$;

$\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}\times 5\times 5\sqrt{5}=\dfrac{25\sqrt{5}}{2}$

$V=\dfrac{125}{6}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{25\sqrt{5}}{2}\times d \Leftrightarrow d=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés