## Exercice 4 — 6 points

**Partie A : étude de la fonction f.**

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, on note $f'$ et $f''$ sa fonction dérivée.

**1.a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

**1.b.** Montrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{2x+1}{2x}$.

**1.c.** Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.

**2.a.** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique que l'on notera $\alpha$ et justifier que $\alpha$ appartient à l'intervalle [1;2].

**2.b.** Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.

**2.c.** Montrer que $\ln(\alpha)=2(2-\alpha)$.

**Partie B : étude de la fonction g.**

La fonction g est définie sur $]0;1]$ par : $g(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln(x)$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$, on notera $g'$ sa fonction dérivée.

**1.** Calculer $g'(x)$ pour $x\in]0;1]$, puis vérifier que $g'(x)=x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$.

**2.a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$.

**2.b.** On admet le tableau de signes suivant :

| x | 0 | | $\frac{1}{\alpha}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(\frac{1}{x})$ | ‖ | + | 0 | – | |

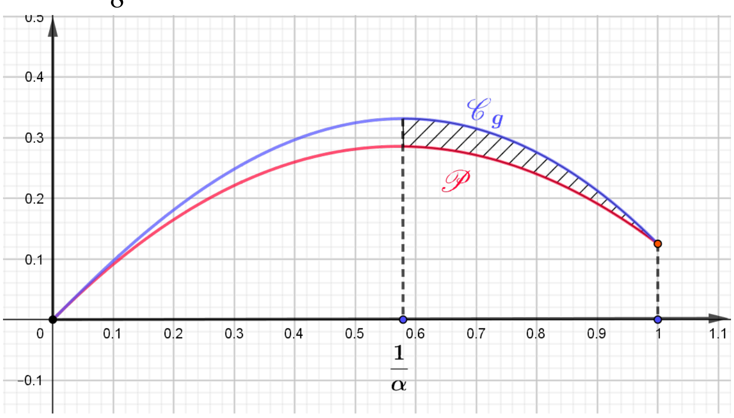
En déduire le tableau de variation de g sur l'intervalle $]0;1[$.
Les images et les limites ne sont pas demandées.

**Partie C : un calcul d'aire**

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

. La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

. La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=-\frac{7}{8}x^2+x$ sur l'intervalle $]0;1]$.



On cherche à calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équations : $x=\dfrac{1}{\alpha}$ et $x=1$ .

On rappelle que : $\ln(\alpha)=2(2-\alpha)$ .

**1.a.** Justifier la position relative des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle ]0;1].

**1.b.** Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$$

**2.** En déduire l'expression en fonction de $\alpha$ de l'aire $\mathscr{A}$.

## CORRECTION

### Partie A

x appartient à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$.

**1.a.** $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$ $\quad\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

**1.b.** $f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=1+1\times 2x=\frac{2x+1}{2x}$ .

**1.c.** $f''(x)=\frac{2\times(2x)-(2x+1)\times 2}{4x^2}=\frac{-2}{4x^2}=\frac{-1}{2x^2}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2}<0$ donc f est concave sur $]0;+\infty[$ .

**2.a.** Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{2x+1}{2x}>0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ .

f est continue (car f est dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$
donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent $\alpha$ appartenant à $]0;+\infty[$ c'est à dire que l'équation $f(x)=0$ a dmet une unique solution dans $]0;+\infty[$

$f(1)=1-2+\frac{1}{2}\ln(1)=-1<0$

$f(2)=2-2+\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{1}{2}\ln(2)>0$ car $2>1$ et $\ln(2)>\ln(1)=0$

$f(\alpha)=0$ et f est croissante sur $[1;2]$ donc $1\leqslant\alpha\leqslant 2$ .

En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha\simeq 1{,}727$ à $10^{-3}$ près.

**2.b.** Si $0<x<\alpha$ alors $f(x)<f(\alpha)=0$

Si $\alpha<x$ alors $f(\alpha)=0<f(x)$

On donne le signe de f(x) sous la forme d'un tableau

| x | 0 | | α | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ‖ | – | 0 | + | |

**2.c.** $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-2+\frac{1}{2}\ln(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(\alpha)=2-\alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha)=2(2-\alpha)$

### Partie B

Pour tout nombre réel x appartenant à ]0;1], $g(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln(x)$ .

**1.** $g'(x)=-\frac{7}{8}\times(2x)+1-\frac{1}{4}\left(2x\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right)=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln(x)-\frac{1}{4}x$

$g'(x)=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln(x)$

Or $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-2-\frac{1}{2}x\ln(x)$

$xf\left(\frac{1}{x}\right)=1-2x-\frac{1}{2}x\ln(x)=g'(x)$ .

**2.a.** La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ .

Si $0<x<\frac{1}{\alpha}$ alors $\frac{1}{x}>\alpha$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)>f(\alpha)=0$ (car f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ .

**2.b.** $g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$ donc le signe de $g'(x)$ de le signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0;1]$.

Tableau de variations de g sur $]0;1]$.

| x | 0 | | $\frac{1}{\alpha}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de g'(x) | ‖ | + | 0 | − | |
| g(x) | ‖ | ↘ | | ↗ | |

**Partie C**

**1.a.** x appartient à l'intervalle $]0;1]$.

$g(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln(x)$ $\qquad h(x)=-\frac{7}{8}x^2+x$

$g(x)-h(x)=-\frac{1}{4}x^2\ln(x)$

$0<x\leqslant 1$ donc $\ln(x)\leqslant 0$ et $g(x)-h(x)\geqslant 0$ .

$\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{P}$ sur $]0;1]$.

**1.b.** Pour calculer l'intégrale, $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx$ on effectue une intégration par parties.

$u(x)=\ln(x)$ $\qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x^2$ $\qquad v(x)=\frac{x^3}{3}$

u et v sont dérivables et leurs fonctions dérivées sont continues sur $]0;1]$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}=0-\frac{1}{3\alpha^3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{3\alpha^3}\ln(\alpha)$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,dx=\left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}=\frac{1}{9}-\frac{1}{3\alpha^3}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx=\frac{1}{3\alpha^3}\ln(\alpha)-\frac{1}{9}+\frac{1}{9\alpha^3}=\frac{3\ln(\alpha)-\alpha^3+1}{9\alpha^3}.$$

On a : $\ln(\alpha)=2(2-\alpha)=4-2\alpha$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx=\frac{12-6\alpha-\alpha^3+1}{9\alpha^3}=\frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$$

**2.** $$\mathscr{A}=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}(g(x)-h(x))\,dx=-\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}x^2\ln(x)\,dx=-\frac{1}{4}\times\left(\frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}\right)=\frac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha^3}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient $\mathscr{A}=0{,}014$ U.A. à $10^{-3}$ près.