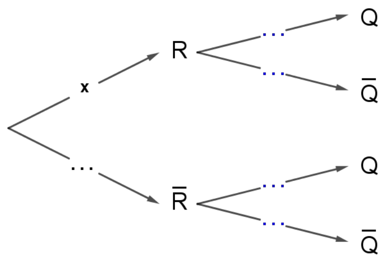
Exercice 1 5 points

Une directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.
Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question :
« Pensez-vous avoir réussi l'examen ? »
Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats, on découvre que :
. 65 % des étudiants ayant échoué on répondu « non» ;
. 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question.
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ son évènement contraire.
Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} prés.

1. Préciser les valeurs $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé, ait réussi l'examen.
2.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci dessous.



2.b Montrer que $x=0,9$.

3. L'étudiant a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20;0,615)$.
La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats. À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard 10 étudiants, les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiales de paramètres $(20;0,615)$.
Soit S la variable définie $S=N_1+N_2+\dots+N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable S.

6. On considère la variable aléatoire $M=\dfrac{S}{10}$.
6.a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice.
6.b. Justifier que $E(M)=12,3$ et $V(M)=0,47355$.
6.c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

CORRECTION

1. 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui » donc $P(Q)=0{,}917$.

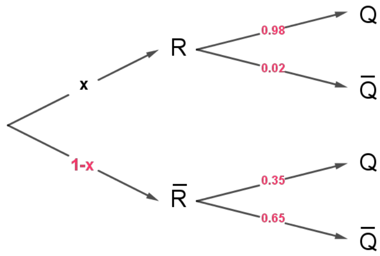
. 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » donc $P_{\bar{R}}(\bar{Q})=0{,}65$.

2.a. $P(R)=x$ et $P(\bar{R})=1-x$

98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui » donc $P_R(Q)=0{,}98$ et $P_R(\bar{Q})=1-0{,}98=0{,}02$.

D'autre part $P_{\bar{R}}(\bar{Q})=0{,}65$ donc $P_{\bar{R}}(Q)=1-0{,}65=0{,}35$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2.b. En utilisant le théorème des probabilités totales.

$P(Q)=P(R\cap Q)+P(R\cap\bar{Q})$

$0{,}917=x\times 0{,}98+(1-x)\times 0{,}35 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}917=x\times 0{,}98+(1-x)\times 0{,}35 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}917-0{,}35=(0{,}98-0{,}35)x$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}567=0{,}63\,x \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{0{,}567}{0{,}63}=0{,}9$.

3. On nous demande de calculer $P_Q(R)$

$P_Q(R)=\dfrac{P(R\cap Q)}{P(Q)}=\dfrac{0{,}9\times 0{,}98}{0{,}917}=\dfrac{0{,}882}{0{,}917}=0{,}962$ à 10^{-3} près.

4. On détermine le plus grand entier n tel que $P(N\geqslant n)\geqslant 0{,}65$.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(N\geqslant 12)=0{,}649$ et $P(N\geqslant 11)=0{,}797$

Donc 79,7 % des étudiants ont obtenu une note supérieure ou égale à 11 et seront récompensés par la directrice.

5. $E(N_1)=E(N_2)=\ldots=E(N_{10})=20\times 0{,}615=12{,}3$ donc $E(S)=10\times 12{,}3=123$.

$V(N_1)=V(N_2)=\ldots=V(N_{10})=20\times 0{,}615\times 0{,}385=4{,}7355$

les 10 variables aléatoires N_i sot indépendantes donc : $V(S)=10\times 4{,}7355=47{,}355$.

6.a. $M=\dfrac{S}{10}$ M est la note moyenne des 10 étudiants pris au hasard.

6.b. $E(M)=E\left(\dfrac{S}{10}\right)=\dfrac{E(S)}{10}=\dfrac{123}{10}=12{,}3$ $\qquad V(M)=V\left(\dfrac{S}{10}\right)=\dfrac{V(S)}{10^2}=\dfrac{47{,}355}{100}=0{,}47355$.

6.c. l'évènement : « la moyenne des notes des dix étudiants pris au hasard est strictement comprise entre 10,3 et 14,3 » est l'évènement $|M-E(M)|<2$ son évènement contraire est $|M-E(M)|\geqslant 2$.

l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour une variable aléatoire X et pour toit nombre réel t strictement positif, donne : $P(|X-E(X)|\geqslant t)\leqslant\dfrac{V(X)}{t^2}$.

Pour la variable aléatoire M et t=2, on obtient :

$P(|M-E(M)|\geqslant 2)\leqslant\dfrac{V(M)}{2^2}=\dfrac{0{,}47355}{4}\simeq 0{,}118$ à 10^{-3} près. Donc $P(|M-E(M)|\geqslant 2)<0{,}2$

Pour l'évènement contraire : $P(|M-E(M)|<2)\geqslant 0{,}8$.

La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 %.

