

Exercice 2

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$.

Pour désinfecter l'eau il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg.L^{-1} est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau.

Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1} .

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se découpe et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg.L}^{-1}$.

Le mercredi 18 juin, il mesure un taux de $0,70 \text{ mg.L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans la piscine, Alain décide à partir du jeudi 20 juin d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg.L}^{-1}$.
2. Pour tout entier n , on note v_n le taux de chlore en mg.L^{-1} , obtenu avec un nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$.
- 2.a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
- 2.b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe le plus entier naturel n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s):
    n=0
    v=0.7
    while .....:
        n=...
        v=...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée n (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore en mg.L^{-1} dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$ où q est la quantité est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
- 2.a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
- 2.b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7 \text{ mg.L}^{-1}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1} .
Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

CORRECTION

Partie A

1. $50 \text{ m}^3 = 50000 \text{ L}$ $15 \text{ g} = 15000 \text{ mg}$

Le taux augmente de : $\frac{15000}{50000} = 0,3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = 0,02 v_n + 0,3$ et $v_0 = 0,7$.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$v_n \leq v_{n+1} \leq 4.$$

Initialisation

$$v_0 = 0,7 \quad v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,634 + 0,3 = 0,934 \quad \text{donc} \quad v_0 \leq v_1 \leq 4.$$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n , on suppose que :

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 4 \quad \text{et on doit démontrer que : } v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4.$$

Or, pour tout entier naturel n , $f(v_n) = v_{n+1}$ avec $f(x) = 0,92x + 0,3$

f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ alors $f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(4)$

$$f(v_n) = v_{n+1}, \quad f(v_{n+1}) = v_{n+2} \quad \text{et} \quad f(4) = 0,92 \times 4 + 0,3 = 3,68 + 0,3 = 3,98 \leq 4$$

donc $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , on a :

$$v_n \leq v_{n+1} \leq 4.$$

2.b. Pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante et $v_n \leq 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.

Toute suite croissante et majorée est convergente donc (v_n) est une suite convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell \quad \text{donc} \quad \ell = 0,92\ell + 0,3 \Leftrightarrow 0,08\ell = 0,3$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{0,3}{0,08} = \frac{30}{8} = 3,75$$

3. $3,75 > 3$ donc à long terme le taux ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes.

4.

```
def alerte_chlore(s):
    n=0
    v=0.7
    while v<=3:
        n= n+1
        v= 0.92*v+0.3
    return n
```

5. En utilisant la calculatrice, on obtient : $v_{16} = 2,95 < 3$ et $v_{17} = 3,01 > 3$.

L'instruction `alerte_chlore(3)` renvoie : 17.

Donc le 6 juillet le taux ne sera plus conforme aux préconisations des piscinistes.

Partie B

1. Les solutions de l'équation différentielle du type : $y' = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec C constante réelle.

Pour l'équation (E): $y' = -0,08x + \frac{9}{50}$.

$$a = -0,08 \text{ et } b = \frac{q}{50} \text{ donc } -\frac{b}{a} = \frac{q}{0,08 \times 50} = \frac{q}{4}.$$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = C e^{-0,08x} + \frac{q}{4} \text{ avec } C \text{ constante réelle.}$$

$$2.a. \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,08x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,08x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}.$$

$$2.b. \text{ On veut que : } \frac{q}{4} = 2 \text{ donc } q = 8.$$

$$f(0) = C + 2 = 0,7 \text{ et } C = -1,3.$$

$$f(x) = -1,3 e^{-0,08x} + 2$$